

Guía 1a - Principio de trabajos virtuales

Repaso Teórico

- **Vínculo holónimo:** se puede escribir como $G_r(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0$, $1 \leq r \leq m$
 Por ejemplo si hacemos girar una partícula atada a una soga, el vínculo es $r - L = 0$.
- **Coordenadas generalizadas:** sea un sistema de N partículas descrito mediante coordenadas $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$. Si existen m vínculos holónomos que las vinculan, no todas son independientes. Podemos describir la dinámica utilizando un conjunto de $n = 3N - m$ *coordenadas generalizadas* independientes $\{q_1, \dots, q_{3N-m}\}$, a partir de las cuáles reescribimos las viejas coordenadas $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(q_1, \dots, q_{3N-m})$.
- **Fuerza de vínculo \mathbf{R}_i :** mantiene la ligadura. Depende del resto de las fuerzas.
- **Desplazamiento virtual $\delta\mathbf{x}_i$:** es a tiempo fijo o instantáneo, $\delta t = 0$, compatible con los vínculos.
- **Principio de trabajos virtuales:** las fuerzas de vínculo no hacen trabajo virtual.

Principio de Trabajos Virtuales

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{x}_i^V = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{x}}_i) \cdot \delta\mathbf{x}_i^V = 0 \quad (1)$$

Podemos reescribir esta ecuación en función de las coordenadas generalizadas. Para ello expresamos un desplazamiento $\delta\mathbf{x}$ en función de q usando regla de la cadena

$$\delta\mathbf{x}_i(q, t) = \sum_{k=1}^{3N-m} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \delta t \quad \Rightarrow \quad \delta\mathbf{x}_i^V(q, t) = \sum_{k=1}^{3N-m} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (2)$$

Recordemos que por definición $\delta t = 0$ para un desplazamiento virtual porque son instantáneos. Utilizando algunas identidades vistas en la teoría y explotando el hecho de que los desplazamientos δq_k son independientes se llega a las ecuaciones de Lagrange.

Ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \quad (3)$$

donde T es la energía cinética y Q_k las *fuerzas generalizadas*.

Ejercicio 1

Tenemos dos partículas de igual masa sometidas cada una a la acción de dos resortes, de constantes elásticas k y k' . En principio cada masa podría moverse en las tres direcciones espaciales. Tenemos $N = 2$ partículas y $3N = 6$ grados de libertad en total, 3 por cada partícula; $\mathbf{x}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ y $\mathbf{x}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$.

Asumamos que las partículas sólo se mueven unidimensionalmente en \hat{X} . Matemáticamente, esta asunción implica poner 4 vínculos holónomos (dos por partícula)

$$Y_1 = d, \quad Z_1 = 0, \quad Y_2 = d, \quad Z_2 = 0 \quad (4)$$

No hay más vínculos. En este caso, los vínculos reducen el número de grados de libertad independientes a $3N - m = 6 - 4 = 2$. Vamos a necesitar entonces 2 coordenadas generalizadas para describir la dinámica del sistema. En principio, es válido elegir a $\{x_1, x_2\}$ como esas coordenadas, siendo estas el apartamiento del equilibrio de cada masa.

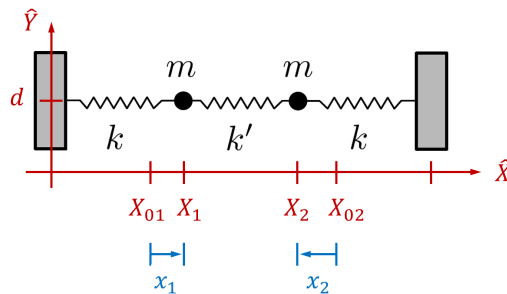


Figura 1: X_1 y X_2 son las posiciones de las partículas; X_{01} y X_{02} sus posiciones de equilibrio; x_1 y x_2 su diferencia.

a) Nos preguntan: sean $q_1 = x_1 + x_2$ y $q_2 = x_1 - x_2$, ¿definen q_1 y q_2 un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?. Estas coordenadas son compatibles con los vínculos (4) y representan dos grados de libertad, por lo que la respuesta es **sí**. De hecho, el par original $\{x_1, x_2\}$ también constituían coordenadas generalizadas. Es más: cualquier par que sea combinación de x_1 y x_2 también será un conjunto de coordenadas generalizadas. Por ejemplo, otro conjunto es el par $\{X_1, X_2\}$ de las posiciones de las masas respecto del origen de la figura 1.

¿Qué no sería un conjunto admisible? Algo que involucre a Y ó Z . Por ejemplo $q_3 = Y_1 + Y_2$ y $q_4 = Y_1 - Y_2$ no son coordenadas generalizadas; los vínculos nos dicen que éstas no son variables sino constantes, $q_3 = 2d$ y $q_4 = 0$.

b) Nos piden describir cualitativamente el movimiento para los casos en que $q_1 = 0$ o $q_2 = 0$. Está claro que el sistema oscilará, pero veamos de qué forma.

- Si $q_1 = 0 \rightarrow \dot{q}_1 = 0 \rightarrow \ddot{q}_1 = 0$, y por lo tanto $x_1 = -x_2 \rightarrow \dot{x}_1 = -\dot{x}_2 \rightarrow \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$. Las oscilaciones de las masas son iguales en amplitud pero opuestas en sentido; se dice que oscilan en *contrafase*.
- Si $q_2 = 0 \rightarrow \dot{q}_2 = 0 \rightarrow \ddot{q}_2 = 0$, y por lo tanto $x_1 = x_2 \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_2 \rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$. Las oscilaciones de las masas son iguales en amplitud y en sentido; se dice que oscilan en *fase*.

Esta elección de coordenadas desacopla el movimiento del sistema en lo que se llaman sus modos *normales* de oscilación. Para ver que efectivamente el sistema se desacopla en las coordenadas q pueden plantear las ecuaciones de Newton. Mientras que en las coordenadas x las ecuaciones están acopladas (x_2 aparece en la ecuación de x_1 y viceversa), en las coordenadas q las ecuaciones son independientes

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m\ddot{q}_1 = -kq_1 \\ m\ddot{q}_2 = -kq_2 - 2k'q_2 \end{cases} \quad (5)$$

c) ¿Cuánto valen las fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2 ? Es importante notar que las Q_k no tienen unidades de fuerza necesariamente, al igual que las coordenadas generalizadas tampoco tienen necesariamente unidades de posición (pueden ser ángulos por ej). Pero siempre se debe cumplir que $\delta W = Q_j \delta q_j$ tenga unidades de trabajo.

Para calcular Q_k usamos su definición dada en (3). Notar que, aunque no está escrito explícitamente, en esa ecuación todas las cantidades dependen de las coordenadas generalizadas. Si partimos de las coordenadas x , que es donde sabemos describir al sistema, y queremos Q_k en las coordenadas q , entonces necesitamos expresar la fuerzas en función de q

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= [-kx_1 + k'(x_2 - x_1)] \hat{X} = \left[-k \frac{q_1 + q_2}{2} - k'q_2 \right] \hat{X} \\ \mathbf{F}_2 &= [-k'(x_2 - x_1) - kx_2] \hat{X} = \left[-k \frac{q_1 - q_2}{2} + k'q_2 \right] \hat{X} \end{aligned} \quad (6)$$

Por otro lado, invirtiendo la relación entre q y x de forma de obtener $x(q)$, podemos derivar

$$\begin{cases} x_1 = \frac{q_1 + q_2}{2} \\ x_2 = \frac{q_1 - q_2}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} = \frac{\partial x_1}{\partial q_2} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial x_2}{\partial q_2} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (7)$$

para obtener las fuerzas generalizadas

$$Q_1 = F_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + F_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_1} = \frac{F_1 + F_2}{2} = -\frac{k}{2} q_1 \quad (8a)$$

$$Q_2 = F_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_2} + F_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_2} = \frac{F_1 - F_2}{2} = -\frac{k}{2} q_2 - k' q_2 \quad (8b)$$

Pueden chequear que utilizando las ecuaciones de Lagrange de (3) se recuperan las ecuaciones de Newton de (5).

En este ejercicio lidiamos con fuerzas elásticas, que son fuerzas conservativas. Es decir, tienen un potencial asociado: $\mathbf{F}_i(x) = -\nabla_i V(x) = -\partial V / \partial \mathbf{x}_i$, donde V no depende de las velocidad.

En este caso, las fuerzas generalizadas se reducen a la derivada del potencial con respecto a q_k

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (9)$$

Podríamos haber calculado Q_k de esta manera en nuestro ejercicio. El potencial total viene dado por la suma del potencial de cada resorte

$$V = \frac{k}{2} x_1^2 + \frac{k'}{2} (x_2 - x_1)^2 + \frac{k}{2} x_2^2 = \frac{k}{4} q_1^2 + \frac{k'}{2} q_2^2 + \frac{k}{4} q_2^2 \quad (10)$$

Pueden ver que derivando el potencial se llega al mismo resultado de la ecuación (8).