

Sobre los vínculos

Me gustaría hacer una breve aclaración sobre un error que suele aparecer en los parciales. En general en la práctica vamos a tratar con vínculos holónomos y no nos van a interesar las fuerzas de vínculo. Lo que digo a continuación vale para ese caso.

Si tenemos m vínculos holónomos, el número de grados de libertad es $n = 3N - m$, y usamos n coordenadas generalizadas $\{q_1, \dots, q_n\}$ para describirlos. Vimos que a partir del principio de D'Alembert uno llegaba a la siguiente expresión

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0 \quad (1)$$

si las fuerzas generalizadas Q_k provienen de fuerzas conservativas. Para derivar las ecuaciones de E-L, es clave utilizar aquí que los q_k son **independientes**. En ese caso, lo que está dentro del corchete se anula para cada k .

Un error común en esta materia es *no* imponer los vínculos en el Lagrangiano. Eso es un problema porque cada Lagrangiano describe un sistema distinto; si no imponen vínculos van a estar estudiando otro problema físico. Por ejemplo para una masa enganchada a una barra que gira con $\dot{\theta} = \omega$ constante (ver ej 9), estaría mal escribir el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(\theta) \quad (2)$$

¿Por qué estaría mal? Porque así escrito \mathcal{L} depende de dos coordenadas, $\{q_1, q_2\} = \{r, \theta\}$, y por lo tanto habría dos ecuaciones de E-L. Pero ese conjunto de ecuaciones no describe una masa que rota con velocidad angular constante, sino una que gira libremente. Podríamos, desesperadamente, imponer el vínculo en las ecuaciones de E-L... pueden chequear que lo que queda es inconsistente (ese conjunto de ecuaciones no tiene solución).

La inconsistencia radica en decir que el corchete en la ecuación (1) se anula, siendo que los q_k no son independientes. Para que lo sean, debemos imponer los vínculos en \mathcal{L} . En este ejemplo, $\theta = \omega t$ y el Lagrangiano correcto sería

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, t) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - V(\theta = \omega t) \quad (3)$$

Otro error común suele ser meter la información de una ecuación de E-L en el Lagrangiano. Y luego hallar el resto de las ecuaciones de E-L a partir de ese Lagrangiano modificado. Nuevamente: si cambiamos el Lagrangiano, cambiamos el sistema físico que estamos discutiendo. Traten de imaginar una línea que divide al Lagrangiano de las ecuaciones de E-L. El Lagrangiano estaría en un nivel teórico, más abstracto; allí solo imponemos vínculos. Las ecuaciones estarían en un nivel práctico; podemos combinarlas, reemplazar la info de una en otra, etc.

Plano Teórico - Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T - V$

Plano Práctico - Ecuaciones E-L $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$

Multiplicadores de Lagrange

En la guía 1 no hay ejercicios que pidan explícitamente usar multiplicadores de Lagrange, pero a veces nos piden las tensiones, así que vamos a aprovechar para volver a calcular la tensión del ejercicio 6 pero utilizando este método. Recordemos un poco la teoría primero.

Supongamos ahora que hay \bar{m} vínculos anholónomos. Como no podemos usarlos para reducir el número de variables, tenemos s variables $\{q_1, \dots, q_s\}$, con $s = n + \bar{m}$. Además suponemos que estos vínculos pueden escribirse como

$$\sum_{k=1}^s A_{kr}(q, t) \delta q_k + B_r(q, t) \delta t = 0, \quad r = 1, \dots, \bar{m} \quad (4)$$

Para desplazamientos virtuales, $\delta t = 0$. Como los δq_k no son independientes (hay vínculos), no podemos hallar las ecuaciones usuales de Euler-Lagrange. Si agregamos estos vínculos como multiplicadores de Lagrange ($\lambda_r(t)$) a las ecuaciones de Euler-Lagrange (suponiendo que Q_k viene de fuerzas conservativas), entonces debemos resolver el conjunto de $s + \bar{m}$ ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} &= P_k = \sum_{r=1}^{\bar{m}} \lambda_r A_{kr}, & k = 1, \dots, s \\ \sum_{k=1}^s A_{kr}(q, t) \dot{q}_k + B_r(q, t) &= 0, & r = 1, \dots, \bar{m} \end{aligned} \quad (5)$$

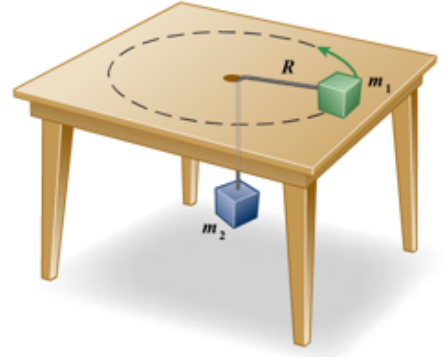
para hallar las $s + \bar{m}$ variables $\{q_1, \dots, q_s\}$ y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\bar{m}}\}$.

Para el caso más simple de vínculos holónomos tipo $G_r(q, t) = 0$, diferenciando y comparando con la eq. (4) tenemos que

$$A_{kr} = \frac{\partial G_r}{\partial q_k}, \quad B_r = \frac{\partial G_r}{\partial t} \quad (6)$$

OBSERVACIÓN EN MAYÚSCULA: Los q_k ahora no son independientes porque no impone los vínculos, los agregué como multiplicadores. Los λ_r van a dar las fuerzas de vínculo correspondientes. Repito: no imponer vínculos al lagrangiano!

Ejercicio 6 - ML



Recordemos rápidamente lo que vimos en este ejercicio. Tomando coordenadas polares para m_1 y cartesianas para m_2 (recordad, si está en negritas es un vector)

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \rho \hat{\rho} \\ \mathbf{r}_2 = z \hat{z} \end{cases} \implies \mathcal{L}(\rho, \phi, z) = \frac{m_1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{z}^2 + m_2gz \quad (7)$$

Notar que ya impusimos algunos vínculos holónomos (3) muy triviales: $z_1 = x_2 = y_2 = 0$. Estos vínculos ya los impuse porque no me importan (a mí) los valores de las fuerzas de vínculos normales. Pero sí quiero saber la tensión.

La tensión de la cuerda es una fuerza de vínculo que mantiene el vínculo holónimo de que la longitud de la cuerda es constante. Ese vínculo se expresa como ($z > 0$)

$$G(q, t) = L - z - \rho = 0 \quad (8)$$

Llevemos el conteo de letras (tenemos $N = 2$ partículas):

- # Vínculos holónomos: $m = 4$
- # Grados de libertad: $n = 3N - m = 2 \implies \{q_1, \dots, q_n\} = \{r, \phi\}$ independientes

Lo que hacíamos era meter este vínculo en \mathcal{L} para obtener el lagrangiano vinculado

$$\mathcal{L}^*(\rho, \phi) = \frac{m_1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{\rho}^2 + m_2g(L - \rho) \quad (9)$$

y resolver las ecuaciones, entonces no aparecían las fuerzas de vínculo.

Si, en cambio, queremos conocer la fuerza de tensión, agregamos el vínculo de la ecuación (8) como un multiplicador. El conteo de letras en este caso es

- # Vínculos holónomos: $m = 3$
- # Vínculos con multiplicadores: $\bar{m} = 1$ (entonces $r = 1$)
- # Grados de libertad: $n = 3N - m - \bar{m} = 2$
- # Variables: $s = 3N - m = 3 \implies \{q_1, \dots, q_s\} = \{r, \phi, z\}$ pero no son independientes

Notar que hay un solo multiplicador, $r = 1$, así que vamos a omitir ese índice. Aplicando la eq. (6) a nuestra G ($k = \rho, \phi, z$)

$$A_\rho = \frac{\partial G}{\partial \rho} = -1, \quad A_\phi = \frac{\partial G}{\partial \phi} = 0, \quad A_z = \frac{\partial G}{\partial z} = -1, \quad B = 0 \quad (10)$$

Reemplazamos en el conjunto de eqs. (5).

¿Pregunta: usamos \mathcal{L} o \mathcal{L}^* ...? (Ver OBSERVACIÓN). Luego

$$\begin{aligned} \rho) \quad & m_1 \ddot{\rho} - m_1 \rho \dot{\phi}^2 = \lambda A_\rho = -\lambda \\ \phi) \quad & \frac{d}{dt} (m_1 \rho^2 \dot{\phi}) = \dot{\ell} = \lambda A_\phi = 0 \Rightarrow m_1 \rho^2 \dot{\phi} = \ell \\ z) \quad & m_2 \ddot{z} - m_2 g = \lambda A_z = -\lambda \\ G) \quad & A_\rho \dot{\rho} + A_\phi \dot{\phi} + A_z \dot{z} + B = 0 \Rightarrow \dot{z} = -\dot{\rho} \end{aligned} \quad (11)$$

En general aunque λ da la fuerza de vínculo, puede suceder que haya un signo global dando vuelta ($\lambda = \pm F_V$). Para comprobarlo hay que comparar con Newton. En este caso tenemos que $\lambda = T$ (ver ecuación en z por ejemplo).

Reemplazando las tres ecuaciones últimas en la primera recuperamos la ecuación de movimiento, de donde despejamos $\ddot{\rho}$ en función de ρ . Luego de las últimas dos despejamos la tensión en la cuerda

$$\lambda = T = m_2(g - \ddot{z}) = m_2(g + \ddot{\rho}) \quad (12)$$

en concordancia con lo visto en el pdf de este ejercicio.

Ejercicio 19

Tenemos una carga ($q > 0$) en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$. En la teoría vieron que, como la fuerza magnética depende de la velocidad, el potencial también. Sin embargo las ecuaciones de E-L se mantienen si las fuerzas se pueden escribir en función de un potencial de la siguiente forma

$$F_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (13)$$

En particular, la fuerza de Lorentz cumple esta relación, donde

$$\mathbf{F}_L = q \mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A} \quad (14)$$

El potencial es

$$U = q\phi - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad (15)$$

En el ejercicio 15 tienen que chequear que de este potencial llegan a la fuerza de Lorentz usando E-L.

Antes de ir al Lagrangiano, ¿recuerdan de Física 3 que movimiento hacía una partícula cargada en un $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$?

Spolier*: Ciclotrón. Da círculos en el plano perpendicular a \mathbf{B} . Para ver si es horario o anti-horario podemos calcular las velocidades iniciales:

$$F_{L_x} = \frac{qB_0}{c} \dot{y}_0, \quad F_{L_y} = -\frac{qB_0}{c} \dot{x}_0 \quad (16)$$

Si $q > 0$ y empieza solo con $\dot{x}_0 \neq 0$ entonces siente una fuerza en $-\hat{y}$. Si empieza solo con $\dot{y}_0 \neq 0$ siente una fuerza en $+\hat{x}$. El movimiento es horario; la fuerza $\mathbf{F}_B = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a \mathbf{v} y a \mathbf{B} . Pueden guiarse por la fig. 1 (fue lo que encontré): si uno cambia el signo de q y de B_0 , las fuerzas son las mismas.

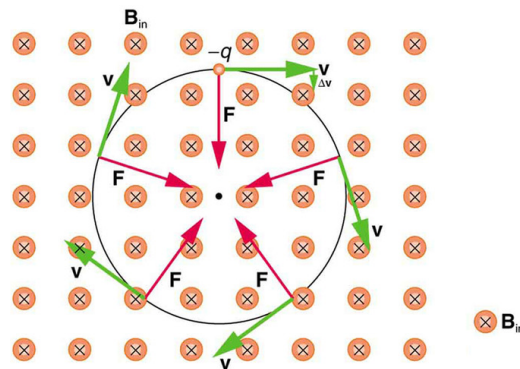


Figura 1: Movimiento circular horario para una partícula con carga negativa en un campo uniforme que apunta hacia abajo (por eso las cruces).

a) Gauge de Landau

En este inciso usamos el gauge de Landau, $\mathbf{A}^L = B_0 x \hat{y}$. Como $\phi = 0$

$$\mathcal{L}^L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega x \dot{y}, \quad \omega = \frac{qB_0}{mc} \quad (17)$$

donde definí una cantidad ω por ahora para reducir la notación (ya veremos quien es).

Un comentario al margen pero útil. Hemos mencionado que los momentos conjugados de las partículas se definen como

$$P_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \implies \mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \quad (18)$$

para el caso general. Veremos más sobre momentos conjugados en la guía 6. En presencia de campos magnéticos, el momento canónico usual $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se generaliza al momento mecánico \mathbf{P} debido a la presencia de fuerzas magnéticas. Notar que \mathbf{P} es dependiente del gauge elegido (depende de \mathbf{A}). En el gauge de Landau

$$P_z = m\dot{z}, \quad P_x = m\dot{x}, \quad P_y = m\dot{y} + m\omega x \quad (19)$$

Continuando, vemos que \mathcal{L}^L es cíclico en y y en z , por lo que las ecuaciones de E-L nos dan

$$\begin{aligned} z) \quad m\dot{z} = P_z = m\dot{z}_0 &\Rightarrow z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t \\ y) \quad m\dot{y} + m\omega x = P_y = cte & \\ x) \quad m\ddot{x} - m\omega \dot{y} = 0 = \frac{d}{dt}(m\dot{x} - m\omega y) &\Rightarrow \tilde{P}_x = m\dot{x} - m\omega y = cte \end{aligned} \quad (20)$$

En el gauge de Landau P_y y P_z son constantes de movimiento, junto con una cantidad $\tilde{P}_x =$. Solo por completitud... ¿habrá algo más que se conserve? \mathcal{L}^L no depende explícitamente de t . Si siguen la demostración de la conservación de la función h verán que esto no afecta su definición y por lo tanto tenemos que

$$h = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}^L}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L}^L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (21)$$

Lo que sí cambia es que el potencial depende de las velocidades, y por lo tanto ya no vale que $h = T + U$. Acá, $h = T$. Podemos chequear usando las ecuaciones de E-L que $dh/dt = 0$.

Para hallar las soluciones resulta más fácil reemplazar la ecuación $y)$ de E-L en la ecuación $x)$. Vamos a llegar a la ecuación del oscilador

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2(x - \bar{x}) & \Rightarrow x(t) = R \cos(\omega t + \phi) + \bar{x} \\ \dot{y} = \frac{P_y}{m} - \omega x & \Rightarrow y(t) = -R \sin(\omega t + \phi) + \bar{y} \end{cases}, \quad \bar{x} = \frac{P_y}{m\omega}, \quad \bar{y} = \frac{\tilde{P}_x}{m\omega} \quad (22)$$

La trayectoria viene dada entonces por una helicoidal (círculo que sube: rotación en el plano

xy más traslación en z) según la fig. 2. La frecuencia del giro es ω , el centro de la órbita se encuentra en $\bar{\mathbf{R}} = (\bar{x}, \bar{y})$ y el radio desde la órbita viene dado por $R^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$.

Usando las condiciones iniciales intenten chequear que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ y(t) &= y_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{\dot{x}_0}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \end{aligned}, \quad z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t \quad (23)$$

Aprovechando estas expresiones nos vamos al inciso d). Si $\mathbf{v}(0) = 0$ entonces la partícula se queda quieta ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$) porque la fuerza magnética dependiente de la velocidad se anula, $\mathbf{F}_B = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$.

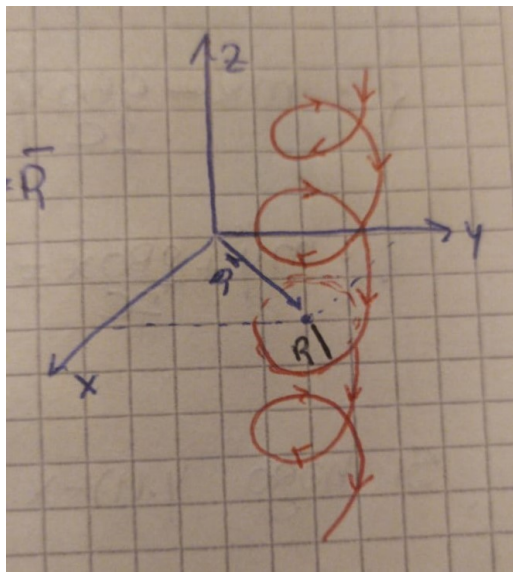


Figura 2: Trayectoria helicoidal de una partícula con carga positiva en un campo $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$.

b) Gauge Simétrico

En este inciso usamos el gauge simétrico, dado por $\mathbf{A}^S = (\mathbf{B} \times \mathbf{r})/2 = B_0(x\hat{y} - y\hat{x})/2$. El lagrangiano queda ($\phi = 0$)

$$\mathcal{L}^S = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m\omega}{2}(xy - yx), \quad \omega = \frac{qB_0}{mc} \quad (24)$$

Las ecuaciones de E-L nos dan

$$\begin{aligned} x) \quad m\ddot{y} + m\omega\dot{x} = 0 &\Rightarrow m\dot{y} + m\omega x = P_y = cte \\ y) \quad m\ddot{x} - m\omega\dot{y} = 0 &\Rightarrow m\dot{x} - m\omega y = P_x = cte \\ z) \quad m\dot{z} = P_z = m\dot{z}_0 &\Rightarrow z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t \end{aligned} \quad (25)$$

Las soluciones son las mismas que en el caso anterior, dadas en la eq. (22). Notamos que en este gauge las cantidades conservadas son P_x y P_y (y P_z). Ahora bien, antes y era cíclica... y ahora no lo es. Las cantidades conservadas no se leían directamente de \mathcal{L}^S , hubo que integrar. Eso es porque en este gauge hay otras coordenadas más ideales para describir el problema. Si se fijan, haciendo la cuenta

$$y.(22) - x.(23) = \dots = \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = \ell_z + \frac{m\omega}{2}(x^2 + y^2) \quad (26)$$

donde $\ell_z = m(xy - yx)$ es el momento angular canónico usual. Es decir que L_z , el momento angular mecánico $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ en \hat{z} , se conserva. El punto es que este gauge tiene simetría de rotación, y convenía usar polares. Si hacen eso les queda el lagrangiano

$$\mathcal{L}^S = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m\omega}{2}r^2\dot{\theta}, \quad \omega = \frac{qB_0}{mc} \quad (27)$$

que es cíclico en θ , dando la conservación de L_z .

Alguno tal vez se pregunte, ¿y si usaba polares en el gauge de Landau? Bueno, ahí también L_z es constante, pero θ no es cíclica.

Resumen: En \mathcal{L} , en vez de \mathbf{E} y \mathbf{B} aparecen los potenciales de gauge ϕ y \mathbf{A} . Por lo tanto, \mathcal{L} depende del gauge. Esto hace que en cada lagrangiano aparezcan distintas cantidades conservadas asociadas a las coordenadas cíclicas. Sin embargo, el problema físico real debe ser independiente del gauge que elijamos usar. Y podemos chequear que en cada gauge las soluciones y las cantidades conservadas (que son varias) son las mismas.

c) Los potenciales vectores del gauge de Landau y simétrico se relacionan por una transformación de gauge tal que $\mathbf{A}^S = \mathbf{A}^L + \vec{\nabla}\psi$. Hallen ψ y pruebe que los lagrangianos se relacionan según

$$\mathcal{L}^S = \mathcal{L}^L + \frac{dF}{dt}, \quad F = \frac{q}{c} \psi \quad (28)$$

Existe un resultado general que dice que si dos lagrangianos se relacionan por una derivada total dependiente de las posiciones y el tiempo, entonces las ecuaciones de E-L son las mismas. Podemos demostrar rápidamente que dF/dt cumple las ecuaciones de E-L. Como

$$\dot{F}(\mathbf{q}, t) = \frac{dF}{dt}(\mathbf{q}, t) = \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (29)$$

entonces

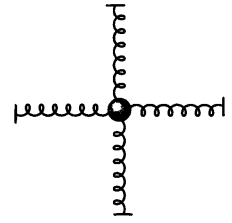
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{F}}{\partial q_k} \quad (30)$$

que no son otra cosa que las ecuaciones de E-L para \dot{F} . Luego, si $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \dot{F}$ y \mathcal{L} satisface las ecuaciones de E-L, entonces \mathcal{L}' también lo hará ya que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_k} \quad (31)$$

Es decir que la física del problema es la misma porque una transformación de gauge modifica el lagrangiano a menos de una derivada total, obteniendo las mismas ecuaciones de movimiento.

Ejercicio 20



a) Tenemos un oscilador bidimensional isotrópico. La fuerza se caracteriza por ser proporcional al desplazamiento del equilibrio en todas las direcciones, $\vec{F} = -k\vec{r}$. Es una fuerza central dirigida hacia el origen. Por ejemplo 4 resortes dispuestos en la forma de la figura de arriba generan una fuerza de este tipo para pequeños desplazamientos. En 3 dimensiones, un ejemplo oscilador isotrópico es un átomo vibrando alrededor de su posición de equilibrio en un cristal simétrico.

Si $k_x = k_y = k$ y $\omega = \sqrt{k/m}$ el lagrangiano viene dado por

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (32)$$

Resolviendo las ecuaciones de E-L tenemos que

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -m\omega^2 x \\ m\ddot{y} = -m\omega^2 y \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega t - \phi_x) \\ y(t) = A_y \cos(\omega t - \phi_y) \end{cases} \quad (33)$$

Para el caso general anisotrópico $\omega_x \neq \omega_y$ estas ecuaciones forman las figuras de Lissajous. Tal vez les hayan aparecido jugando en algún osciloscopio con dos generadores de señal. Pueden buscar información sobre ellas o ver videos ([acá](https://www.youtube.com/watch?v=uPbzhxYTioM) hay uno lindo hecho con un péndulo bidimensional y arena, <https://www.youtube.com/watch?v=uPbzhxYTioM>). También pueden explorar el código de Mathematica asociado a este pdf. Para el caso isotrópico, estas figuras se reducen a elipses o rectas.

Para verlo, queremos llegar a la ecuación de la elipse. Si simplificamos cambiando el origen del tiempo $t \rightarrow t + \phi_x/\omega$ y definimos $\Delta = \phi_y - \phi_x$ entonces se puede mostrar que

$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega t) \\ y(t) = A_y \cos(\omega t - \Delta) \end{cases} \implies \frac{x^2}{A_x^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos \Delta + \frac{y^2}{A_y^2} = \sin^2 \Delta \quad (34)$$

Pero Max eso no se parece a la ecuación de la elipse. Es cierto... ¿por qué?

Porque tomamos como ejes a x e y . Para obtener la ecuación de la elipse debemos pararnos en sus semi-ejes. Se puede mostrar que haciendo una rotación existe un ángulo θ tal que

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \implies \exists \theta \text{ tal que } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (35)$$

Por ejemplo si $\Delta = \pi/2$ entonces de (34) tenemos una elipse con semi-ejes en x e y .

Si $\Delta = 0$ tenemos una recta (a y b no están bien definidos para $\Delta = 0$).

En la fig. 3 vemos las figuras que se forman para distintos valores de Δ si $A_x = A_y$.

Pueden usar el script de Mathematica para explorar otras opciones.

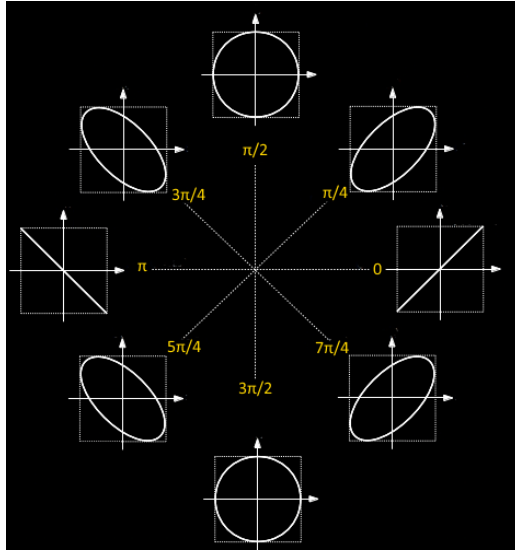


Figura 3: Trayectorias posibles para el oscilador armónico isótropo bidimensional.

b) Ahora nos dan otro lagrangiano. Haciendo las ecuaciones de E-L obtenemos

$$\mathcal{L}^* = m\dot{x}\dot{y} - m\omega^2 xy \implies \begin{cases} m\ddot{x} = -m\omega^2 x \\ m\ddot{y} = -m\omega^2 y \end{cases} \quad (36)$$

Las ecuaciones de movimiento son las mismas!

Pero a diferencia de los distintos gauges del ejercicio anterior, en este caso no hay una derivada total entre los lagrangianos, no podemos escribir $\mathcal{L} = \mathcal{L}^* + \dot{F}$. Tampoco están relacionados por una constante, $\mathcal{L} \neq \lambda\mathcal{L}^*$. ¿Cómo podemos tener las mismas ecuaciones de movimiento entonces?

Una opción es que el sistema físico que se está describiendo es otro. Dos sistemas físicos podrían tener las mismas ecuaciones de movimiento, pero sus coordenadas significar cosas diferentes. O tal vez el sistema físico sea el mismo, pero descrito en otras coordenadas. Para explicitar esto cambiemos las letras en \mathcal{L}^* tal que

$$\mathcal{L}^* = m\dot{z}_1\dot{z}_2 - m\omega^2 z_1 z_2 \quad (37)$$

¿Existe alguna transformación de coordenadas que me lleve de \mathcal{L} a \mathcal{L}^* ? Como \mathcal{L}^* sigue siendo cuadrático en las velocidades y en las coordenadas, esto sugiere un cambio lineal de coordenadas. Probamos con

$$x = Az_1 + Bz_2, \quad y = Cz_1 + Dz_2 \quad (38)$$

donde pedimos que $AD - BC \neq 0$ para que la transformación sea invertible. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m}{2} \left[(A^2 + C^2)\dot{z}_1^2 + 2(AB + CD)\dot{z}_1\dot{z}_2 + (B^2 + D^2)\dot{z}_2^2 \right. \\ & \left. - \frac{m\omega^2}{2} (A^2 + C^2)z_1^2 + 2(AB + CD)z_1z_2 + (B^2 + D^2)z_2^2 \right] \end{aligned} \quad (39)$$

Si elegimos

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad D = -C = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad (40)$$

recuperamos $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Si escribimos a $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ en polares entonces tenemos que

$$\begin{cases} x = \frac{z_1 + z_2}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{z_1 - z_2}{i\sqrt{2}} \end{cases} \implies \begin{cases} z_1 = \frac{x + iy}{\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} e^{i\theta} = z \\ z_2 = \frac{x - iy}{\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} = z^* \end{cases} \quad (41)$$

Notar que como z_1 y z_2 son imaginarios tenemos un total de 4 grados de libertad reales, en contraposición con los 2 grados originales (r, θ) . La condición $z_2 = z_1^*$ nos restringe 2 de esos 4 grados de libertad. Es decir que en lagrangiano \mathcal{L}^* estamos describiendo las mismas trayectorias pero utilizando el plano complejo. El eje real corresponde al eje \hat{x} y el eje imaginario a \hat{y} . Notar que sigue valiendo que $\mathcal{L}^* = T - V$.

En la teórica vieron esto de usar coordenadas imaginarias para resolver el gauge de Landau del ej 19. Aunque lo usaron a nivel de las ecuaciones de E-L, también pueden definir esas coordenadas imaginarias a nivel lagrangiano.

Como comentario general (y final), el lagrangiano es solo un medio para obtener las ecuaciones de movimiento. No tiene que tener necesariamente la forma $\mathcal{L} = T - V$. Tampoco es único, dos lagrangianos diferentes pueden dar las mismas ecuaciones de movimiento. Aunque en este ejemplo estaban relacionados por una transformación de coordenadas, los lagrangianos equivalentes no se reducen solamente a aquellos relacionados por transformaciones de coordenadas o que difieren en una derivada total o una constante multiplicativa. Además, sus coordenadas no se reducen a distancias y ángulos. Pueden ser números imaginarios, funciones de onda, campos (algún día lo vamos a cuantizar...).