

Guía 3 - Fuerzas Centrales

Hagamos un pequeño repaso teórico para que tengan las herramientas necesarias para hacer los ejercicios. Suponemos que tenemos un sistema de dos cuerpos en presencia de un potencial central. El Lagrangiano se separa en una parte para el centro de masa y en otra para el movimiento de la diferencia entre las posiciones de los cuerpos, que llamaremos $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\mathcal{L}_T = \frac{M}{2} \dot{R}_{CM}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) = \mathcal{L}_{CM} + \mathcal{L}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (1)$$

Como $\vec{V}_{CM} = cte$ (usar E-L) nos enfocamos en \mathcal{L} . Lo próximo es usar que el movimiento es plano debido a que la fuerza es central. ¿Por qué? Por un lado \vec{L} se conserva en módulo y dirección, porque $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ (ver también ejercicio 13 de la guía 2). Por otro lado, $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$. Es decir que \vec{L} apunta siempre en una dirección (que la tomaremos como \hat{z}) y \vec{r} es perpendicular a esa dirección, por lo que el movimiento es plano. Usando coordenadas polares

$$\mathcal{L}(r, \varphi, \dot{r}) = T - V = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (2)$$

Las ecuaciones de E-L y de conservación nos dicen que

$$r) \quad \mu \ddot{r} = \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (3)$$

$$\varphi) \quad \mu r^2 \dot{\varphi} = \ell = cte \Rightarrow \mu r^2 d\varphi = \ell dt \quad (4)$$

$$h) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow h = E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) \quad (5)$$

Como φ es cíclica, obtenemos la conservación del momento angular en \hat{z} , ℓ . También se conserva la función h porque \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo. Dado que la cinética es homogénea de grado dos en las velocidades y el potencial no depende de las velocidades, h es la energía.

Se abren dos caminos para resolver la dinámica. Una opción es resolver la ecuación diferencial de E-L en r . Otra opción es reducir el problema a uno unidimensional reemplazando la conservación de ℓ en la de E

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}, \quad V_{eff} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad \Rightarrow \quad \mu \ddot{r} = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \quad (6)$$

Recuadro esta ecuación porque en general se suele pedir, dado un potencial $V(r)$, analizar cualitativamente los distintos tipos de órbitas junto con algunas propiedades a partir del potencial efectivo.

Si queremos más información podemos integrar esta expresión para hallar $r(t)$. Sin embargo,

esa integral suele ser muy complicada de realizar. Un poco más simple resulta pasar nuevamente de $r(t)$ a $r(\varphi)$ usando la relación entre $d\varphi \leftrightarrow dt$ dada por la conservación de ℓ en (4). En ese caso debemos resolver la integral

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \frac{\ell}{\mu r^2} dt = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu r^4}{\ell^2}(E - V) - r^2}} \quad (7)$$

Resulta que resolver la integral en (7) sigue siendo bastante difícil. Hay dos casos en que la integral es simple y se puede hacer analíticamente: una es la gravitatoria/Kepler/Coulomb, $V = -k/r$, y otra es la elástica isótropa, $V = kr^2/2$. Ojo que son dos constantes k diferentes (ni siquiera tienen las mismas unidades). Por ello son nuestros caballitos de batalla: la guía gira en torno a ellas. Ambas llevan como solución la ecuación de las cónicas. El truco está en usar la siguiente integral [Goldstein Eq. (3.51)]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \cos^{-1}\left(-\frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right) \quad (8)$$

La solución depende de las condiciones iniciales y del potencial.

Ejercicio 2: Nos dan el potencial de un oscilador isótropo, $V = kr^2/2$.

a) Dibuje el potencial efectivo para un caso general.

De (6) tenemos que el potencial efectivo es

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r), \quad V_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2 \quad (9)$$

donde suponemos que tenemos una sola partícula, por eso aparece m en vez de μ .

Podemos decir que hay dos formas de dibujar $V_{eff}(r)$. La primera, más cualitativa, sería graficar los dos términos de $V_{eff}(r)$ por separado y luego dibujar su suma. El problema es que, dependiendo del valor de las constantes del problema (como k, ℓ), pueden haber varios casos posibles, dificultándose enormemente para potenciales más complejos.

La segunda, más cuantitativa, es hacer un análisis funcional del $V_{eff}(r)$. Para ello miramos

- Los límites. En nuestro caso, $V_{eff}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \pm\infty} +\infty$.
- Puntos críticos r_i . Aquí hay uno solo: $\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Leftrightarrow r_c^4 = \frac{\ell^2}{mk} \ (r > 0)$.
- Estabilidad. Los puntos críticos son

$$\left. \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} \right|_{r_i} < 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Máximo} \\ \text{(inestable)} \end{array} \quad \left| \quad \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} \right|_{r_i} > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Mínimo} \\ \text{(estable)} \end{array} \quad (10)$$

Para el oscilador r_c resulta ser un mínimo. Notar que no siempre es necesario hacer la cuenta, a veces se puede ver la estabilidad gráficamente. Aquí, como la función empieza y termina en $+\infty$, al punto crítico no le quedaba otra que ser un mínimo.

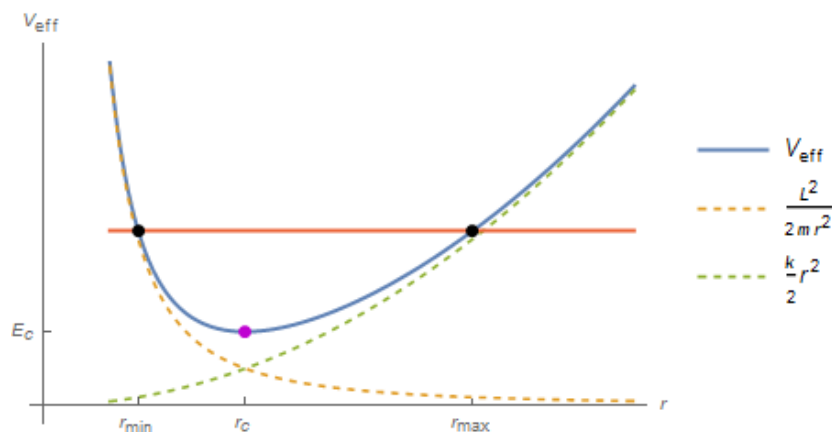


Figura 1: Potencial efectivo del oscilador isótropo bidimensional.

Hecho el análisis funcional podemos graficar el $V_{eff}(r)$ de la figura 1, con un valor arbitrario de energía en rojo. Notar que $V_{eff}(r) > 0$ siempre. Además, para que haya movimiento la energía debe superar el valor de la energía mínima, $E \geq E_c = l\sqrt{k/m}$.

Les suena conocido este dibujo? Lo vimos en el ejercicio 2 de la guía 0! La diferencia es que antes era un movimiento unidimensional, ahora es bidimensional. El punto de equilibrio pasa a ser el radio de la órbita circular y los puntos de retorno ahora son los radios de mínimo y máximo acercamiento. Noten además que solo dibujamos el lado derecho porque $r > 0$.

Este potencial ya lo vimos también en el ejercicio 20 de la guía 1. En la guía 1 lo resolvimos usando cartesianas, hallando $x(t)$ e $y(t)$. La versión de la guía 3 sería resolverlo hallando $r(\varphi)$ según la ecuación (7), usando el truquito de la ecuación (8). Pero aquí no nos piden tanto.

De acá viene el famoso dicho de Sidney Coleman (físico de altas energías) ‘la carrera de un físico consiste en resolver el problema del oscilador armónico en niveles crecientes de abstracción’. Y lo van a volver a hacer, en su versión cuántica. Y de campos. Y de campos cuántica. Y en el ejercicio 5. Y en la guía 6 y 7, usando el formalismo Hamiltoniano.

Podemos completar el análisis hallando los puntos de retorno, definidos como los puntos donde $\dot{r} = 0$ y por lo tanto $E = V_{eff}(r)$

$$E = V_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r_{\pm}^2 = \frac{E}{k} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E_c}{E}\right)^2} \right] \quad (11)$$

Vemos que r_- corresponde al radio mínimo y r_+ al radio máximo.

b) *Discuta los movimientos posibles en función del valor de ℓ y de las condiciones iniciales.*

Las c.i. nos fijan el valor de la energía y de ℓ . Primero que nada, mencionamos que para que haya movimiento $E \geq E_c$. De la figura 1 podemos interpretar como es la órbita: la partícula describe un movimiento acotado entre dos radios (si $E \neq E_c$). Y eso es todo lo que podemos decir mirando el $V_{eff}(r)$. ¿Serán elipses? ¿Serán rombos? Solo aquel que halle $r(\varphi)$ lo sabrá.

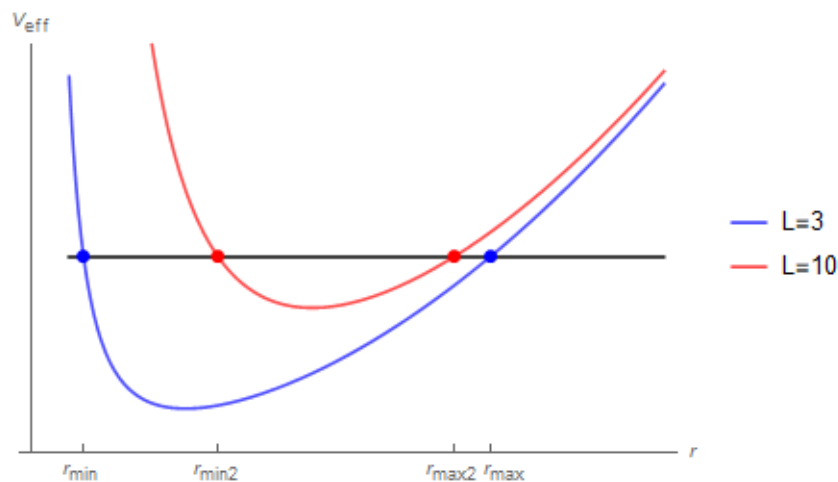


Figura 2: Potencial efectivo del oscilador para distintos valores de ℓ , con E fija.

El inciso es demasiado general, hay muchas formas de variar las condiciones iniciales. Podemos decir que como $V_{eff}(r)$ no depende de \dot{r}_0 ni φ_0 , esas c.i. no modifican cualitativamente la órbita. En cambio r_0 y $\dot{\varphi}_0$ modifican a ℓ .

Una opción es variar ℓ manteniendo \dot{r}_0 y r_0 constantes (variarnos solo $\dot{\varphi}_0$); entonces el V_{eff} y

la energía se modificarán para cada valor de ℓ .

Otra opción podría ser variar las c.i. de forma tal que ℓ cambie pero la energía no. En la figura 2 está el gráfico del potencial efectivo para dos valores de ℓ con la misma energía.

Como vemos r_{min} aumenta y r_{max} disminuye. También podíamos ver esto de la ecuación (11), que graficamos en la figura 3 en función de ℓ . Chequeemos algún caso límite. Vemos que si $\ell \rightarrow 0$ entonces $r_{min} \rightarrow 0$. La trayectoria resultante sería una recta, cayendo hacia el origen.

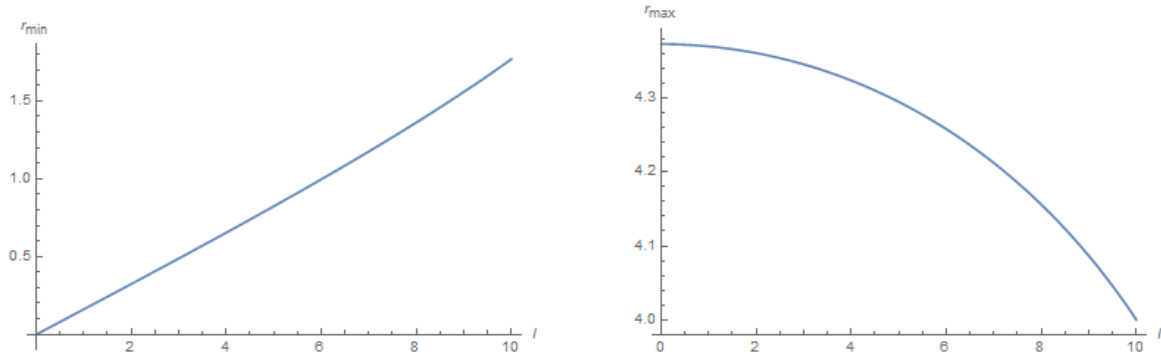


Figura 3: r_{min} (izquierda) y r_{max} (derecha) en función de ℓ para $m = 1$, $k = 2$ y $E = 19$.

c) Encuentre el período para el caso en que la órbita es circular.

Para un movimiento general, encontrar el período no es tarea simple porque se necesita hallar una expresión para $\varphi(t)$. Recordemos que estamos usando polares, así que el período de revolución τ_φ se define como

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \varphi(t) \\ y(t) = r(t) \sin \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow \varphi(\tau_\varphi) = 2\pi \quad (12)$$

Pero si la órbita es circular el asunto se vuelve casi trivial. La clave está en notar que, debido a la conservación de momento angular (4), si el radio es constante entonces también es constante la velocidad angular

$$\dot{\varphi}_c = \frac{\ell}{mr_c^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \omega_\varphi \quad \Rightarrow \quad \tau_\varphi = \frac{2\pi}{\omega_\varphi} \quad (13)$$

d) Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la órbita circular.

Si la órbita difiere de la circular en una cantidad ϵ pequeña, entonces podemos hacer un Taylor del potencial efectivo alrededor de $r = r_c + \epsilon$

$$V_{eff}(r) \simeq V_{eff}(r_c) + \cancel{\frac{dV_{eff}(r)}{dr}} \Big|_{r=r_c} \epsilon + \frac{d^2V_{eff}(r)}{dr^2} \Big|_{r=r_c} \frac{\epsilon^2}{2} \quad (14)$$

donde el segundo término se anula porque r_c es un mínimo del potencial. Si reemplazamos esta

expresión en la ecuación diferencial de (6) (es derivar la ecuación de la energía), llegamos a la ecuación de un oscilador

$$m\ddot{r} = -\frac{dV_{eff}}{dr} \Rightarrow m\ddot{\epsilon} \simeq -\frac{d^2V_{eff}(r)}{dr^2}\bigg|_{r=r_c} \epsilon = -\omega_r m\epsilon \quad (15)$$

Las órbitas que difieren levemente de la circular oscilan entre dos radios con frecuencia radial ω_r

$$r(t) = r_c + A \cos(\omega_r t + \delta), \quad \omega_r = \frac{1}{m} \frac{d^2V_{eff}(r)}{dr^2}\bigg|_{r=r_c} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\omega_\varphi \quad (16)$$

Notar que ω_r ya lo habíamos hallado en la guía 0 (Ej 1).

Ejercicio 3

Nos dan una fuerza que corresponde a la de Kepler pero con una leve modificación por el término c/r^3 . Antes de resolverlo repasemos el caso de Kepler ($c = 0$).



KEPLER Y LAS CÓNICAS

Haciendo el análisis funcional que mencioné antes (mirar límites + puntos críticos + estabilidad), uno puede graficar el potencial efectivo de Kepler de la figura 7.

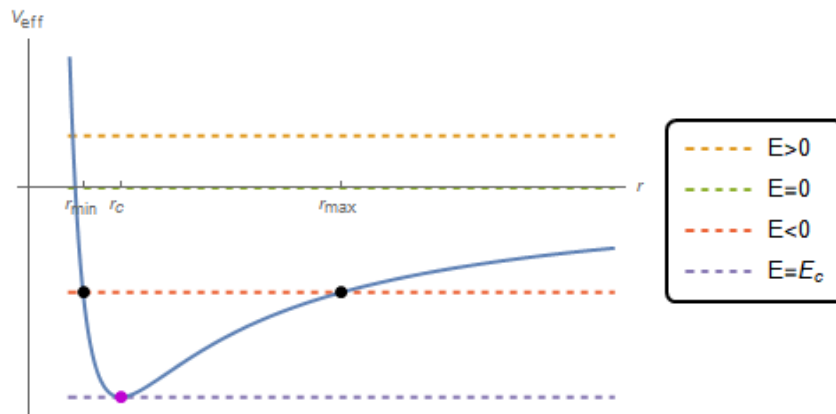


Figura 4: Potencial efectivo de Kepler para distintos valores de energía.

Como vemos hay 4 tipos de órbitas diferentes según el valor de la energía. Mirando solo el V_{eff} lo único que podemos decir es que son acotadas si $E < 0$ y no-acotadas si $E \geq 0$ [hay un punto de máximo acercamiento cuando $E = V_{eff}(r_m)$]. En particular, si $E = E_c = -\mu k^2/2\ell^2$, la órbita será circular. Para decir algo más sobre la forma de la trayectoria hay que encontrar la ecuación de la órbita $r(\varphi)$. En la teoría vieron que, usando la integral (8), se llega a la llamada ‘ecuación de las cónicas’, que es una ecuación polar con el foco en el origen (existen otras soluciones según las condiciones iniciales)

$$r(\varphi) = \frac{B^2/A}{1 + e \cos(\varphi)}, \quad \begin{cases} e > 1, E > 0 : & \text{Hipérbola} \\ e = 0, E = 0 : & \text{Parábola} \\ e < 1, E < 0 : & \text{Elipse} \\ e = 0, E = -|E_c| : & \text{Círculo} \end{cases} \quad (17)$$

Las 4 tipos de órbitas, ilustradas en la figura 5, se distinguen según el valor de la *excentricidad* e (que depende de E) (gif). El significado de A y B cambia según la órbita. ¿Che y por qué se llaman cónicas? Porque viene de rebanar un cono de distintas maneras [figura 5] (gif). Centremos en la elipse, que es como orbitan los planetas.

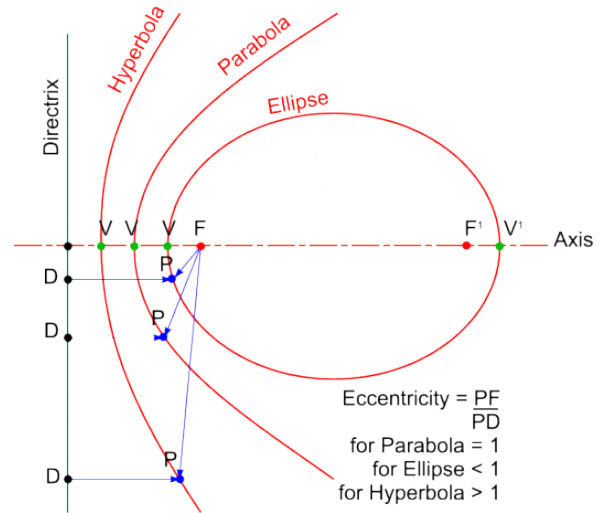
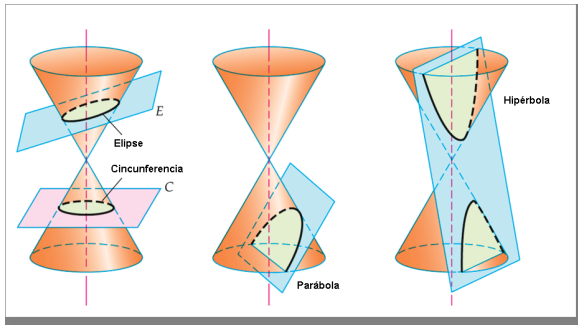


Figura 5: Cónicas para distintos valores de excentricidad e .

- Elipse:** En este caso A representa el semi-eje mayor de la elipse y B el menor. Sin embargo la ecuación polar (17) no tiene su origen en el centro de la elipse, sino en uno de sus focos (F), como en el panel derecho de la figura 6. Esto del foco, ¿les recuerda algo a las lentes de F2? (imagen). Como nuestro $r(\varphi)$ se mide desde el foco, en vez de alcanzar los valores A y

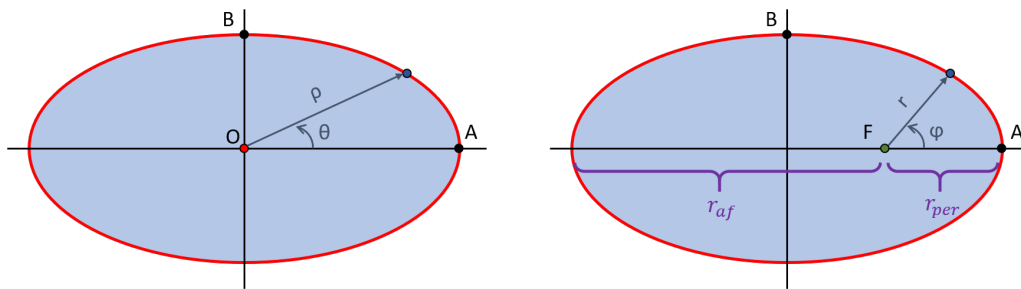


Figura 6: Izquierda: elipse desde el centro. Derecha: elipse desde el foco.

B , tendremos una distancia de máximo acercamiento o *perihelio* en $\varphi = 0$, y otra de máximo alejamiento o *afelio* en $\varphi = \pi$. Estos radios pueden expresarse como

$$r_{per} = A(1 - e), \quad r_{af} = A(1 + e), \quad e = \frac{F}{A} = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} \quad (18)$$

Para el caso particular de Kepler ($V = -k/r$), los valores de los semiejes y de excentricidad son ($E = -|E| < 0$)

$$B = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu|E|}}, \quad A = \frac{k}{2|E|} \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1 - \frac{2\ell^2}{\mu k^2}|E|} \quad (19)$$

También podemos hallar el período. Aunque no despejamos $\varphi(t)$ [ver ecuación (12)], hay otro camino. La idea es que la órbita se completa cuando se recorre todo el área, y conocemos el

área de una elipse. Luego, partiendo de la segunda ley de Kepler

$$\frac{dA_r}{dt} = \frac{\ell}{2\mu} \Rightarrow \int_0^\tau dt = \frac{2\mu}{\ell} \int_0^{A_r} dA_r \Rightarrow \tau = 2\pi \frac{\mu AB}{\ell} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (20)$$

donde usamos que el área de la elipse es $A_r = \pi AB$ (¿les suena a algo de la tercera ley?).



Volvamos. Queríamos resolver el ejercicio 3, que es un Kepler modificado mediante una fuerza que contiene un término extra

$$F(r) = \frac{c}{r^3} - \frac{k}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V(r) = \frac{c}{2r^2} - \frac{k}{r} \quad (21)$$

Notar que el término extra se parece al potencial centrífugo, los dos van como $1/r^2$. Así que cuando escribamos el potencial efectivo podemos juntarlos en un único término

$$V_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{\bar{\ell}^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \quad \bar{\ell}^2 = \alpha^2 \ell^2, \quad \alpha^2 = 1 + \frac{mc}{\ell^2} \quad (22)$$

El interludio de recién fue para recordar Kepler común, que es cuando $c = 0$ y $\alpha = 1$. Vemos que el nuevo potencial efectivo es igual al de Kepler con la modificación $\ell \rightarrow \bar{\ell} = \alpha\ell$. La pregunta es: ¿qué cambia ese α ?

Vemos que la forma funcional de V_{eff} no cambió, solo se modificó el valor de una constante. Todo el análisis que hicimos del V_{eff} se mantiene; hay 4 tipos de órbitas según el valor de la energía. Lo que sí va a cambiar es la ecuación polar para $r(\varphi)$ en (17). Para verlo habría que volver a hacer la integral (7) ayudándose de la integral de tablas (8).

Sin embargo, hay un atajo. La clave está en notar que redefinir el momento angular también implica redefinir el ángulo

$$\alpha\ell = mr^2 \alpha\dot{\varphi} \rightarrow \bar{\ell} = mr^2 \bar{\dot{\varphi}}, \quad \text{con } \bar{\varphi} = \alpha\varphi \quad (23)$$

La solución será la misma de Kepler pero modificando $\ell \rightarrow \alpha\ell$ y $\varphi \rightarrow \alpha\varphi$. Si $E < 0$

$$r(\varphi) = \frac{B^2/A}{1 + e \cos(\alpha\varphi)}, \quad B = \frac{\alpha\ell}{\sqrt{2\mu|E|}}, \quad A = \frac{k}{2|E|} \quad (24)$$

Ya vimos que si $\alpha = 1$ la órbita descrita por esta ecuación corresponde a una elipse con origen en el foco como en la figura 6. Un ciclo en (r, φ) se completa cuando pego una vuelta a la elipse: por ejemplo cuando voy de $(r_{per}, 0) \rightarrow (r_{af}, \pi) \rightarrow (r_{per}, 2\pi)$. Pasé por un radio mínimo r_{per} y un máximo r_{af} . El ángulo que me llevó completar un ciclo fue 2π . La órbita es cerrada porque después de una vuelta ($\varphi = 2\pi$) vuelvo al lugar donde empecé, ya que $\cos(0) = \cos(2\pi)$ en la ecuación polar.

¿Qué cambia α ? Como $\cos(\varphi) \rightarrow \cos(\alpha\varphi)$, el recorrido anterior se modifica a $(r_{per}, 0) \rightarrow (r_{af}, \pi/\alpha) \rightarrow (r_{per}, 2\pi/\alpha)$. Este recorrido está dibujado para $\alpha = 4/3$ en la figura 7 izquierda, que se llama gráfico polar (es la trayectoria en el plano x, y). Recuerden que el origen es un foco de la elipse.

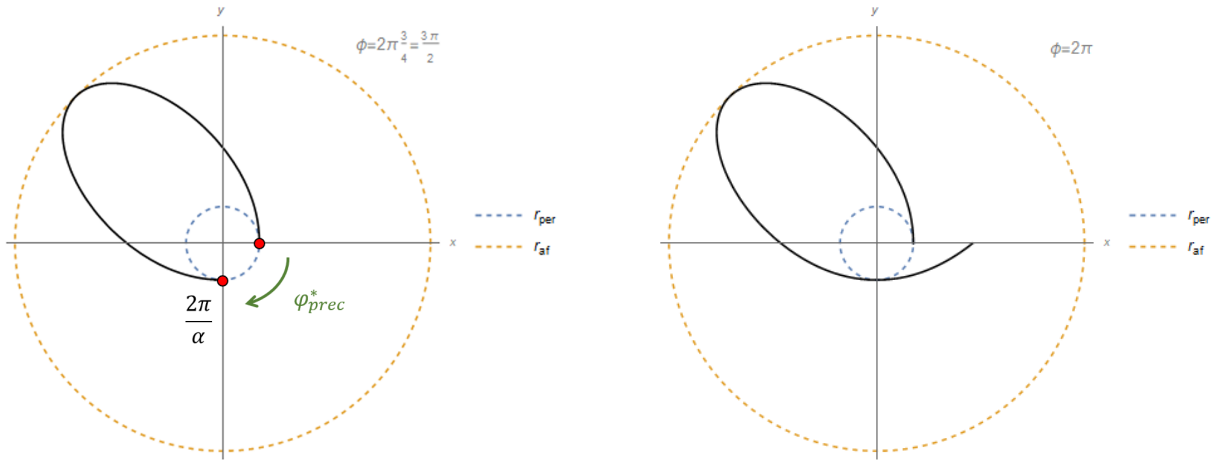


Figura 7: La trayectoria está en negro. Los datos son $\alpha = 4/3$, $A = 0,2$ y $e = 0,7$.
Izquierda: $\varphi = 2\pi/\alpha$, completé un ciclo pero no volví adonde empecé.
Derecha: $\varphi = 2\pi$, hice un giro completo.

Si definimos un ciclo como darle la vuelta a la elipse, entonces ahora el ángulo que le llevó completarlo es $\Delta\varphi = 2\pi/\alpha$. Podemos notar que ahora cuando completo un ciclo no vuelvo adonde empecé, porque estoy en ángulo $2\pi/\alpha < 2\pi$. No llegué a 2π , el punto de regreso se “corrió” de lugar un ángulo $\varphi_{prec}^* = 2\pi - \Delta\varphi$. A este movimiento se le llama *precesión*. Como empecé en r_{per} , lo que está precesando es el *perihelio*, que es el radio más cercano de la órbita.

ÓRBITAS CERRADAS: la condición de volver adonde empecé es que se complete un ciclo en un múltiplo racional de 2π

$$\text{La órbita es cerrada si } \Delta\varphi = 2\pi \frac{m}{k} \Leftrightarrow \alpha = \frac{k}{m}, \quad k, m \in \mathbb{N}$$

$$k = \text{Número de Ciclos}, \quad m = \text{Número de giros}$$

Para $\alpha = 4/3$, vuelvo adonde empecé luego de $k = 4$ ciclos y $m = 3$ giros completos del ángulo, como se ve en la figura 8. Si α no es racional la órbita no será cerrada.

Para terminar, calculemos la velocidad de precesión. Un ciclo $\Delta\varphi$ se completa en un tiempo igual al período τ dado por (20), donde el perihelio precedió en un ángulo φ_{prec}^* , ver figura 7. En nuestro caso con $\alpha = 4/3$, $\varphi_{prec}^* = \pi/2$. Es decir que $\varphi_{prec}(t = \tau) = \varphi_{prec}^*$. Si hago dos ciclos,

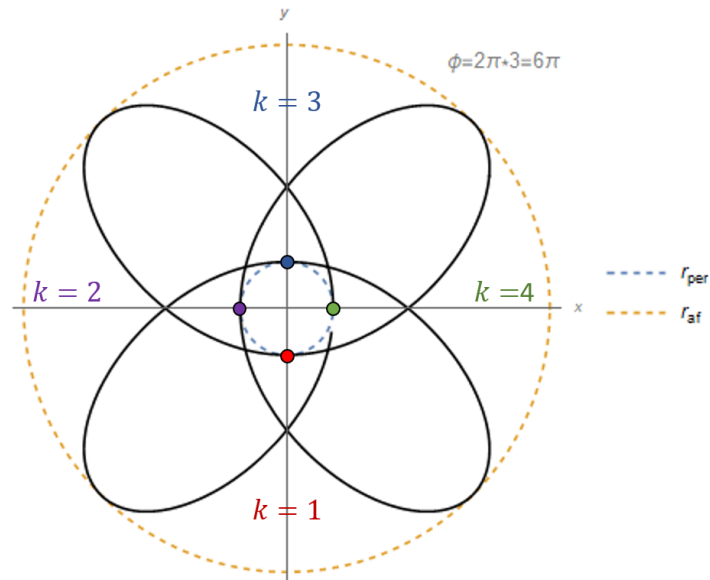


Figura 8: Trayectoria a punto de cerrarse en $\varphi = 6\pi$, para $k = 4$ y $m = 3$.

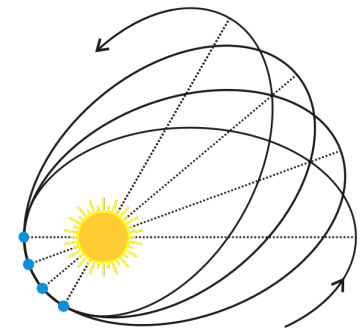
el ángulo de precesión aumenta en dos, $\varphi_{prec}(t = 2\tau) = 2\varphi_{prec}^*$. La relación es lineal

$$\varphi_{prec}(t) = \frac{t}{\tau} \varphi_{prec}^* \Rightarrow v_{prec} = \dot{\varphi}_{prec} = \frac{\varphi_{prec}^*}{\tau} = \frac{2\pi - 2\pi/\alpha}{\tau} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \quad (25)$$

Es probable que no vean bien de estos dibujos que la trayectoria es una elipse que precede. Para convencerse miren el gif que está subido a la página de la materia.

HISTORIA: En el sistema solar, los planetas orbitan en elipses (aproximadamente) alrededor del Sol. Como el Sol es muy masivo está muy cerca del centro de masa, así que podemos tomar al Sol en el foco. Pueden ver un gif de Wikipedia al respecto, que es una versión animada de la figura que está abajo.

Este problema es interesante porque en 1859 Le Verrier notó, re-analizando observaciones previas del tránsito de Mercurio sobre el disco solar desde 1697 a 1848, que la precesión del perihelio de Mercurio (de 531" por siglo) tiene una anomalía (de 43") que no podía explicarse mediante el potencial gravitatorio de Kepler ni por otros efectos Newtonianos como las presencia de otros planetas... parecería que hace falta algún tipo de corrección en la fuerza para obtener la precesión deseada.



Einsten logró predecir valor de la anomalía en el marco de la Relatividad General, dándole un impulso enorme a la teoría. La anomalía es más notable en Mercurio porque al estar más cerca del sol los efectos gravitatorios son más fuertes, y porque su excentricidad es grande.