Ejercicio 7

En primer lugar voy a analizar las coordenadas necesarias para describir el problema. Dado que hay una partícula, pero que esta no tiene movimiento en la dirección del ángulo azimutal al estar limitada por el cono, esta tiene dos grados de libertad y voy a necesitar dos coordenadas generalizadas para describir su movimiento, r y ϕ.

La velocidad de una partícula en coordenadas esféricas se expresa como:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}sen(\theta)\hat{\phi}$$

Considerando que $\theta = \alpha$, entonces $\dot{\theta} = 0$ y la energía cinética de la partícula puede expresarse como:

$$T = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 sen^2(\alpha)]$$

Mientras que la energía potencial que viene dada exclusivamente por el potencial gravitatorio es:

$$V = mgrcos(\alpha)$$

Por lo tanto, el lagrangiano queda:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 sen^2(\alpha)] - mgrcos(\alpha)$$

Si realizo las derivadas respecto de **r**:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}) = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 sen^2(\alpha) - mgcos(\alpha) \end{cases} \Longrightarrow m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 sen^2(\alpha) - mgcos(\alpha) \quad (1)$$

$$\boxed{\ddot{r} = r\dot{\phi}^2 sen^2(\alpha) - gcos(\alpha)}$$

Si realizo las derivadas respecto de ϕ, puedo encontrar una magnitud conservada, l:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}) = \frac{d}{d}(mr^2\dot{\phi}sen^2(\alpha)) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{mr^2\dot{\phi}sen^2(\alpha) = l}$$

La magnitud l me permite escribir a $\dot{\phi}$ en función de las r para reemplazarlo en la otra ecuación que derivé del Lagrangiano.

$$\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2 sen^2(\alpha)} \quad (2)$$

Al reemplazarlo en (1) obtengo:

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3 sen^2(\alpha)} - mgcos(\alpha) \tag{3}$$

Si escribo a $\ddot{r}$ como $\frac{d}{dt}\dot{r}$ y multiplico la expresión (3) por $\dot{r}$ es fácil integrar para obtener otra magnitud conservada del problema, la energía:

$$m\frac{d}{dt}\dot{r}\dot{r} - \frac{l^2\dot{r}}{mr^3 sen^2(\alpha)} + mgcos(\alpha)\dot{r} = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}[\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2 sen^2(\alpha)} + mgcos(\alpha)r] = 0}$$

$$\underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2}_{\text{E. cinética}} + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2 sen^2(\alpha)} + mgcos(\alpha)r}_{\text{Potencial Efectivo } V_{ef}} = E \tag{4}$$

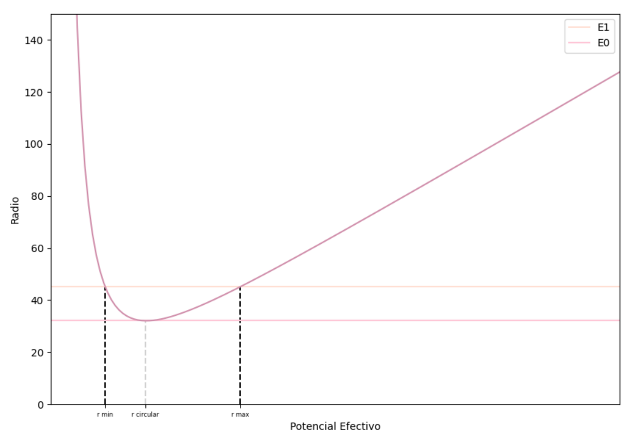

Figura 1: *Forma funcional del potencial efectivo con radio arbitrario manteniendo las condiciones iniciales dadas en el inciso b.*

Dado que la energía es una constante de movimiento, es de utilidad para obtener los radios máximos y mínimos a los que estará limitado el movimiento (Figura 1) de la partícula en función de las condiciones iniciales.

Calculo en primer lugar, la constante l para luego conocer la energía inicial E_0. A $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
l =& m r_0^2 \dot{\phi}_0 sen(\alpha)^2 \\
l =& \frac{ma^2\sqrt{4\sqrt{3}\frac{g}{a}}}{4} \\
\Longrightarrow l^2 =& \frac{\sqrt{3}m^2ga^3}{4}
\end{aligned}
$$

Como sé que esto se cumple para todo tiempo, puedo reemplazarlo en (4):

$$
E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\sqrt{3}mga^3}{2r^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}mgr \tag{5}
$$

Si reemplazo las condiciones iniciales en (5) puedo obtener E_0:

$$
E_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}mga + \frac{\sqrt{3}}{2}mga = \sqrt{3}mga \tag{6}
$$

Dado que los radios máximo y mínimos son puntos de retorno $\dot{r}$ valdrá 0 y la energía potencial efectiva será igual a la energía que tenía inicialmente la partícula.

$$
E\bigg|_{r_{max}} = E\bigg|_{r_{min}} = E_0
$$

$$
\frac{\sqrt{3}mga^3}{2r^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}mgr = \sqrt{3}mga
$$

Si acomodo mejor la expresión y multiplico por r^2 :

$$
\frac{\sqrt{3}}{2}r^3 - \sqrt{3}ar^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^3 = 0
$$

$$
r^3 - 2ar^2 + a^3 = 0
$$

Se ve a simple vista que el radio inicial es raíz de este polinomio y a partir de este podemos factorizar para obtener las otras dos raíces que son $\frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Como $\frac{a}{2}(1 - \sqrt{5})$ es un valor negativo, lo descartó por no tener sentido físico y me queda $r_{min} = a$ y $r_{máx} = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Viendo la forma del potencial en la Figura 1 se deduce que hay un movimiento posible de órbita circular, donde la energía inicial es el mínimo de energía potencial. En este movimiento la velocidad radial vale cero y la energía es solo potencial. El radio (r_c) puede obtenerse entonces minimizando ésta función:

$$
\frac{\partial V_{ef}}{\partial r}\bigg|_{r_c} = 0
$$

$$
mgcos(\alpha) - \frac{l^2}{mr_c^3 sen^2(\alpha)} = 0
$$

$$\Longrightarrow r_c^3 = \frac{l^2}{m^2 g sen^2(\alpha) cos(\alpha)} \tag{7}$$

Si reemplazo l en función de las condiciones iniciales:

$$r_c^3 = \frac{m^2 r(t=0)^4 \dot{\phi}(t=0)^2 sen^4(\alpha)}{m^2 g sen^2(\alpha) cos(\alpha)}$$

Puedo acomodar un poco la expresión teniendo en cuenta que el radio inicial será el de orbita circular, que se mantendrá durante todo el movimiento.

$$r_c = \frac{g cos\alpha}{sen^2(\alpha)\dot{\phi}_0^2} \tag{8}$$

Y la velocidad $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$ será:

$$\boxed{\dot{\phi}_0 = \sqrt{\frac{g cos\alpha}{sen^2(\alpha) r_0}}}$$

Si el radio es cercano al radio de órbita circular, puedo hacer un desarrollo de Taylor del potencial al rededor de este punto para obtener una expresión aproximada:

$$V_{ef} \approx V_{ef}\Big|_{r_c} + \frac{\partial V_e f}{\partial r}\Big|_{r_c}(r - r_c) + \frac{\partial^2 V_e f}{\partial r^2}\Big|_{r_c}\frac{(r-r_c)^2}{2}$$

Sé que el segundo término da cero y si reescribo la expresión definiendo $\epsilon = r - r_c$

$$V_{ef} \approx \frac{l^2}{2mr_c^2 sen^2(\alpha)} + mgcos(\alpha)r_c + \frac{\epsilon^2}{2}[\frac{3l^2}{mr_c^4 sen^2(\alpha)}]$$

Puedo obtener la fuerza que actúa en el sistema como $-$ la derivada del potencial respecto de ϵ e igualarlo a $m\ddot{\epsilon}$ por Newton:

$$m\ddot{\epsilon} = -\frac{dV_{eff}}{d\epsilon} = -\frac{3l^2}{mr_c^4 sen^2(\alpha)}\epsilon$$

$$\Longrightarrow \ddot{\epsilon} + \frac{3l^2}{m^2 r_c^4 sen^2(\alpha)}\epsilon = 0$$

Esta es la ecuación de un oscilador con frecuencia

$$w = \sqrt{\frac{3l^2}{m^2 r_c^4 sen^2(\alpha)}}$$

. Si reemplazo l^2 bajo la suposición de qué es el del movimiento circular, y obtengo $\dot{\phi}$ de movimiento circular de (1), si considero que $\ddot{r} = 0$ en este tipo de movimiento:

$$w = \sqrt{\frac{3gcos(\alpha)}{r_c}}$$

En movimiento circular la frecuencia con la que la masa da una vuelta completa es $\dot{\phi}_0$, que como dije anteriormente, puede obtenerse de (1):

$$\dot{\phi}_0 = \sqrt{\frac{gcos(\alpha)}{r_c sin^2(\alpha)}}$$

Si el $sin(\alpha)$ toma el valor de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ el periodo de oscilación es igual al periodo orbital, y por lo tanto la masa cruzaría el mismo punto al finalizar el periodo.

Observaciones:

- El radio r_c también sale de hacer $\ddot{r} = 0$ en la ecuación (3). También podría haberse usado (3) para obtener la misma ecuación de movimiento para la variable ϵ. Para ello se la linealiza (haciendo Taylor a primer orden) alrededor del $r = r_c$ de órbita circular (sin usar la energía).

- La frecuencia angular del movimiento ($\dot{\phi}$) está tomada a orden cero como la constante que corresponde al movimiento circular ($r \sim r_c$).

- Las órbitas pueden ser cuasi-cerradas si $\frac{\omega}{\dot{\phi}} = \frac{\tau_\phi}{\tau_r} = \frac{p}{q}$ es un número racional (cociente de enteros), por lo cual luego de un tiempo $T = q\tau_r = p * \tau_\phi$ el sistema vuelve al mismo punto en r y en ϕ y la órbita es cuasi-cerrada (τ_r y τ_ϕ son los períodos radial y angular).

  Finalmente un comentario sobre el enunciado. Las condiciones iniciales de b) no se corresponden con el caso de movimiento circular (hay dos puntos de retorno distintos). Por ello el análisis para c) y d) no usa las mismas condiciones iniciales que en b). Pueden también verificar que la condición de órbita circular se puede obtener usando MCU y Newton, como en F1.