Guía 1: Ecuaciones de Lagrange: Problemas 6 y 10.

Mecánica Clásica
Vladimir D. Rodríguez Chariarse

Introducción

Se ejemplifica el uso de las ecuaciones de Lagrange para el caso de fuerzas conservativas (que derivan de un potencial). Es importante:

- Identificar el caracter del movimiento de cada partícula, el número de grados de libertad del sistema, y una buena elección de coordenadas generalizadas.
- Calcular la energía cinética T a partir del cálculo de las velocidades de las partículas en el sistema.
- Evaluar correctamente los potenciales que entran en V, regla fundamental: el potencial gravitatorio crece con la altura, por lo que si el eje vertical apunta para abajo entonces se le debe agregar un signo $-$.
- Los dos problemas tratados tienen una o dos masas con movimiento en un plano, y las coordenadas generalizadas apropiadas son coordenadas polares, la velocidad se expresa como es sabido por

  $$\mathbf{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}$$

  y su cuadrado (por ser coordenadas curvilineas ortogonales):

  $$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2$$

  .

- Siendo ambos problemas sistemas conservativos se conserva la energía $E = T + V$. Mas adelante veremos como derivar esto a partir de las simetrías del Lagrangiano. Como ejercicio en el problema 6a realizaremos una primera integral de la ecuación de movimiento radial (pasar de ecuaciones de segundo orden en el tiempo a primer orden).

  Recordemos el Lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange para este caso conservativo:

  $$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = T - V$$

  $$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}\Big) = \frac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i} \tag{1}$$

  donde $q_i,\ \dot{q}_i$ las coordenadas y velocidades generalizadas.

Problema 6.

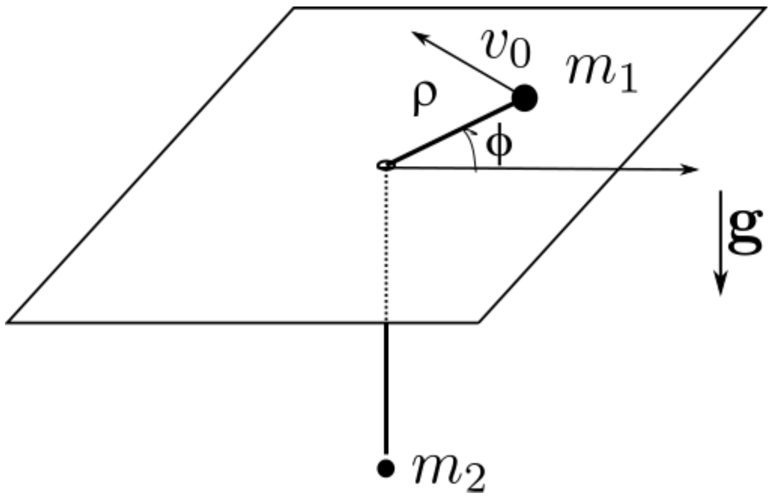


Figura 1: Problema 6a

De la figura se deduce que la masa m_1 posee un movimiento plano por lo que las coordenadas son polares en dicho plano: ρ y ϕ. La masa m_2 se mueve en el eje vertical, su coordenada sería z (positivo hacia abajo). El vínculo es la longitud de la soga: $L = z + \rho$, por lo que los grados de libertad son solamente dos. Elegimos como coordenadas generalizadas:ρ, ϕ.

Teniendo en cuenta lo puntualizado anteriormente, obtenemos:

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{\rho}^2 \qquad V = -m_2 g(L - \rho)$$

$$\mathcal{L}(\dot{\rho}, \dot{\phi}, \rho) = \frac{(m_1 + m_2)}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + m_2 g(L - \rho) \tag{2}$$

Ecuaciones de Lagrange

Usamos ahora las ecuaciones de Lagrange (1) con el Lagrangiano (2) para ambas coordenadas:

Para ρ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = (m_1 + m_2)\dot{\rho} \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\Big) = (m_1 + m_2)\ddot{\rho}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = m_1\rho\dot{\phi}^2 - m_2(L - \rho)\dot{\phi}^2 - m_2 g\cos(\phi)$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{\rho} = m_1\rho\dot{\phi}^2 - m_2 g \tag{3}$$

esta ecuación también se obtiene sumando dos de las ecuaciones de Newton (¿cuales?), por lo que la tension de la cuerda se cancela.

La ecuación de Lagrange para ϕ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m_1 \rho^2 \dot{\phi} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \text{(coordenada cíclica)} \quad p_\phi = m_1 \rho^2 \dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1 \rho^2 \dot{\phi}) = 0 \tag{4}$$

De (4) se deduce la conservación del momento generalizado p_ϕ:

$$m_1 \rho^2 \dot{\phi} = l_z \quad \text{momento angular constante}$$

despejando de aquí $\dot{\phi}$ y reemplazando en (3) obtenemos:

$$(m_1 + m_2)\frac{d}{dt}\dot{\rho} = \frac{l_z^2}{m_1 \rho^3} - m_2 g \tag{5}$$

multiplicando esta ecuación por $\dot{\rho}$ (factor integrante) y usando que :

$$\dot{\rho}(\rho(t)) \Rightarrow \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}\frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\rho}^2}{d\rho}$$

se obtiene:

$$\frac{m_1 + m_2}{2} d\dot{\rho}^2 = (\frac{l_z^2}{m_1 \rho^3} - m_2 g) d\rho$$

que puede ser integrada para obtener:

$$\frac{m_1 + m_2}{2}(\dot{\rho}^2 - \dot{\rho}_0^2) = \Big(- \frac{l_z^2}{2 m_1 \rho^2} - m_2 g \rho \Big) - \Big(- \frac{l_z^2}{2 m_1 \rho_0^2} - m_2 g \rho_0 \Big)$$

finalmente queda:

$$\frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\rho}^2 + V_{ef}(\rho) = E \text{ constante, donde} \qquad V_{ef}(\rho) = \frac{l_z^2}{2 m_1 \rho^2} - m_2 g \rho \tag{6}$$

La ecuación (6) define un problema unidimensional equivalente en la coordenada ρ. Al término $\frac{l_z^2}{2 m_1 \rho^2}$ se lo denomina potencial centríifugo pues es repulsivo y proviene de un valor no nulo de momento angular l_z.

Como en el caso unidimensional esta conservación nos permite definir para valores dados de E (energía) y de l_z (momento angular) los valores posibles de la coordenada ρ (usando que la parte cinética debe ser positiva):

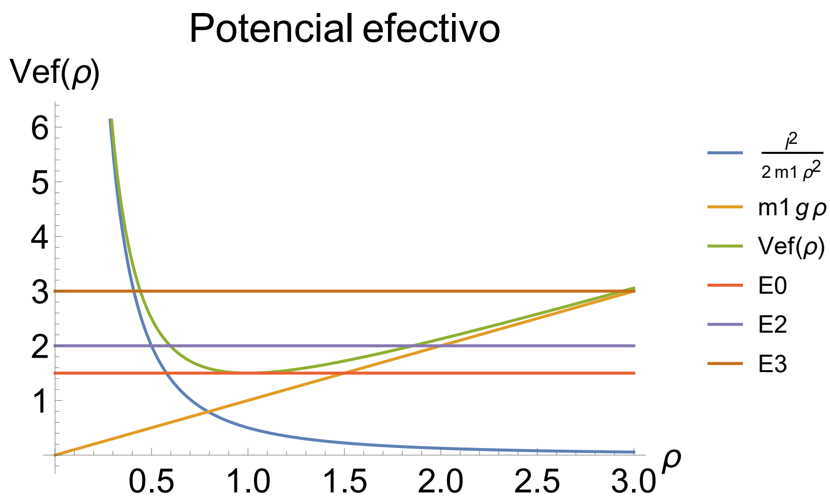


Figura 2: Problema unidimensional equivalente. E_0 es la energía de movimiento circular, las otras dos energías tienen dos puntos de retorno (cuando $V_{ef}(\rho) = E$).

Condiciones iniciales

Para el problema se tiene que a $t = 0$:

$$\rho = \rho_0 \quad \rho_0 \dot{\phi}_o = v_0 \quad \Rightarrow l_z = m_1 \rho_0 v_0 \quad \dot{\rho}_0 = 0 \quad \Rightarrow E = \frac{m_1}{2} v_0^2 + m_2 g \rho_0$$

En este caso E es la energía a menos de una constante $-m_2 g L$, o tomando el cero de potencial en $z = -L$ para la masa m_2.

Pregunta ¿Cuanto debe valer v_0 para que m_1 tenga una trayectoria circular de radio ρ_o? De la Fig. 2 la energía debe ser la mínima posible, para lo cual ρ_o debe satisfacer $\frac{\partial V_{ef}}{\partial \rho}|_{\rho_0} = 0$ y $E = V_{ef}(\rho_0)$. Usando (6) y el valor de l_z obtenemos una condición sobre v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} g \rho_0}$$

como $\dot{\rho}_0 = 0$, se cumple tiene $E = V_{ef}(\rho_0) = \frac{3}{2} m_2 g \rho_0$

Se pide al alumno que verifique este resultado usando movimiento circular uniforme para la masa m_1, caso en el cual la fuerza centrípeta es la tensión que es igual al peso de m_2.

Es útil parametrizar la velocidad inicial en función de un parámetro s,

$$v_0 = \sqrt{s g \rho_0}$$

tal que si $s = s_0 = m_2/m_1$ se tiene un movimiento circular. Si $s < s_0$, rho_0 es el menor punto de retorno, si Si $s > s_0$, ρ_0 es el mayor punto de retorno. Los puntos de retorno se obtienen de:

$$E = \frac{m_1}{2}(5+2s_0)g\rho_0 = (\frac{\rho_0}{\rho})^2 g\rho_0 s + m_2 g\rho \;\Rightarrow (s+2s_0) = su^{-2} + 2s_0 u \quad \text{donde} \quad u = \frac{\rho}{\rho_0}$$

se verifica que $u = 1$ es solución, por lo que $\rho = \rho_0$ es un punto de retorno. Factorizando $(u-1)$ de la ecuación cúbica se obtiene una ecuación cuadrática para u cuyas soluciones son:

$$u = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 8s_0 s}}{4s_0}$$

solamente la raiz positiva es la físicamente correcta, por lo que el otro punto de retorno es el valor positivo de:

$$\rho^* = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 8s_0 s}}{4s_0}\rho_0$$

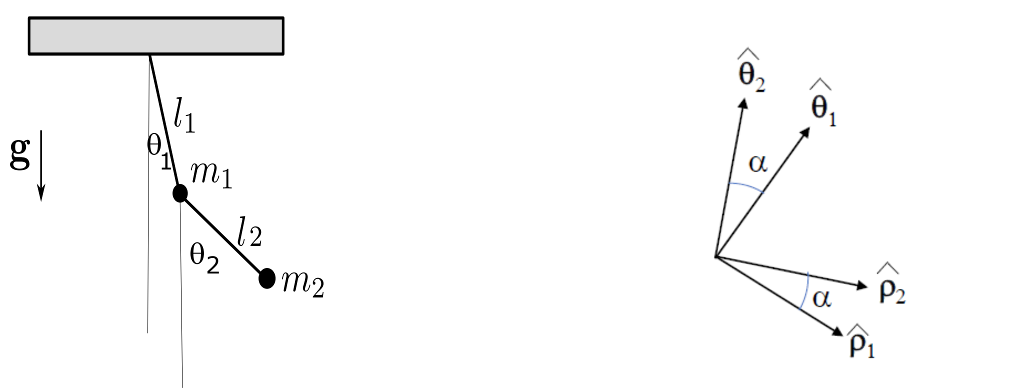
Tensión de la cuerda

En esta parte de la guía usaremos una de las ecuaciones de Newton para hallar la fuerza de vínculo[1]. Basta plantear la ecuación de movimiento para la masa m_2 :

$$m_2\ddot{z} = -T + m_2 g \quad \Rightarrow \quad T = m_2\Big(g - \frac{1}{m_1+m_2}(\frac{l_z^2}{m_1\rho^3} - m_2 g)\Big)$$

donde aquí T es la tensión de la cuerda, y se ha usado (5).

Problema 10.



(a) Problema 10

(b) Versores polares de cada masa.

Figura 3: Coordendas generalizadas y versores.

De la figura 3a se deduce que las masas $m_{1,2}$ poseen un movimiento plano. Las coordenadas elegidas para los dos grados de libertad del sistema son: θ_1, y θ_2.

[1] La otra alternativa es usar mutiplicadores de Lagrange.

La masa m_1 se mueve en órbita circular de radio fijo $\rho = l_1$, por lo que su velocidad en polares es:

$$v_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

la velocidad de la masa m_2 es la suma de la velocidad de m_1 mas la velocidad de m_2 con respecto a m_1

$$\mathbf{v_2} = l_1\dot{\theta}_1\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{1} + l_2\dot{\theta}_2\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{2}$$

y su cuadrado es:

$$v_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{1}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

donde se usó la figura 3b, y que $\alpha = \theta_2 - \theta_1$. La energía potencial de cada masa se calcula usando la coordenada vertical respectiva desde el punto de apoyo, obteniendose

$$V_1 = -m_1gl_1\cos(\theta_1) \quad V_2 = -m_2g(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_1))$$

uniendo estos resultados obtenemos el Lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L}(\theta_1,\theta_2,\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2) = \frac{m_1}{2}l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\Big(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) + l_2^2\dot{\theta}_2^2\Big) + m_1gl_1\cos(\theta_1) + m_2g\big(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_2)\big) \quad (7)$$

Las ecuaciones de Lagrange se calculan con paciencia y esmero:

Para θ_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} &= m_1l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2\Big(l_1^2\dot{\theta}_1 + l_1l_2\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2\Big)\\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\Big) &= (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 - m_2l_1l_2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) \qquad (8)\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} &= m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_1) - (m_1+m_2)gl_1\sin(\theta_1)
\end{aligned}$$

Obteniendose la ecuación de Lagrange para θ_1:

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 - m_2l_1l_2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) = -(m_1+m_2)gl_1\sin(\theta_1) \quad (9)$$

Para θ_2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2} &= m_2l_1l_2\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1 + m_2l_2^2\dot{\theta}_2\\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2}\Big) &= m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2l_1l_2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 \qquad (10)\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} &= -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2gl_2\sin(\theta_2)
\end{aligned}$$

Obteniendose la ecuación de Lagrange para θ_2:

$$m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1) + m_2l_1l_2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 = -m_2gl_2\sin(\theta_2) \quad (11)$$

Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio estable

Observemos que el equilibrio estable para este problema está dado por: $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Para pequeños apartamientos del equilibrio linealizamos las ecuaciones de Lagrange alrededor de valores: $\theta_1 \sim 0$, $\theta_2 \sim 0$, $\dot{\theta}_1 \sim 0$, $\dot{\theta}_2 \sim 0$. Las velocidades son también pequeñas pues la energía del sistema está solamente un poco por arriba del valor mínimo. Usando $sin(\theta_1) \sim \theta_1$, $\sin(\theta_2 - \theta_1) \sim \theta_2 - \theta_1$, $\cos(\theta_2 - \theta_1) \sim 1$ a primer orden, además de despreciar los términos de segundo orden: $\dot{\theta}_1^2$, $\dot{\theta}_2^2$ y $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$, obtenemos las ecuaciones linealizadas:

$$\begin{gathered}(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 = -(m_1 + m_2)g l_1 \theta_1 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \ + \ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 = -m_2 g l_2 \theta_2\end{gathered} \tag{12}$$

Definiendo:

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -(m_1 + m_2)g l_1 & 0 \\ 0 & -m_2 g l_2 \end{pmatrix}.$$

el sistema lineal se escribe en forma vectorial:

$$\boldsymbol{T}\ddot{\vec{\theta}} = -\boldsymbol{V}\vec{\theta}$$

Proponiendo soluciones armónicas: $\vec{\theta} = \vec{a}e^{i\omega t}$ (se toma la parte real al final), la segunda derivada temporal es $\ddot{\vec{\theta}} = -\omega^2\vec{\theta}$, obteniendo la ecuación de autovalores generalizada:

$$\boldsymbol{V}\vec{a} = \omega^2\boldsymbol{T}\vec{a}$$

El sistema de ecuaciones tiene solución no trivial si $|\boldsymbol{V} - \omega^2\boldsymbol{T}| = 0$ lo cual es una ecuación de segundo grado para ω^2, cuyas dos soluciones positivas dan las denominadas frecuencias de oscilación normales, y los autovectores $\vec{a}$ asociados son denominados modos normales de oscilación.

Para el caso de dos péndulos iguales: $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l$ se obtiene:

$$\omega_\pm = (2 \pm \sqrt{2})\frac{g}{l}$$

y los autovectores son:

$$\vec{a}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

El movimiento mas general es una combinación lineal de las soluciones:

$$\vec{\theta}(t) = A_+\vec{a}_+e^{i\omega_+ t} + A_-\vec{a}_+e^{i\omega_- t}$$

tomado la parte real:

$$\vec{\theta}(t) = \alpha_+\vec{a}_+\cos(\omega_+ t + \phi_+) + \alpha_-\vec{a}_-\cos(\omega_- t + \phi_-)$$

Esta solución depende de cuatro constantes arbitrarias que son definidas por las condiciones iniciales del problema. Para la condición inicial $\theta_1 = \theta_2 = 0$ las fases son $\phi_+ = \phi_- = -\pi/2$, por lo que

$$\vec{\theta}(t) = \alpha_+ \vec{a}_+ \sin(\omega_+ t) + \alpha_- \vec{a}_- \sin(\omega_- t)$$

la condición de resposo a $t = 0$ de la masa m_1 nos provee la relación que existe entre las amplitudes $\alpha_\pm$

$$\dot{\theta}_1(0) = \omega_+ \alpha_+ + \omega_- \alpha_- = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_+ = -(\sqrt{2} - 1)\alpha_-$$

la presencia del modo de menor frecuencia es casi el doble que el de mayor frecuencia. Falta determinar una amplitud global que es dada por $\dot{\theta}_2(0)$.

Tensiones en los hilos

Veamos s la figura 3b para relacionar lo versores polares de ambas partículas:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\mathbf{2} &= \quad \cos(\theta_2 - \theta_1)\hat{\rho}_\mathbf{1} + \sin(\theta_2 - \theta_1)\hat{\theta}_\mathbf{1} \\ \hat{\theta}_\mathbf{2} &= -\sin(\theta_2 - \theta_1)\hat{\theta}_\mathbf{1} + \cos(\theta_2 - \theta_1)\hat{\rho}_\mathbf{1} \end{aligned} \tag{13}$$

Usando Newton para m_1:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = \mathbf{F_1}$$

necesitaremos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = l_1 \ddot{\theta}_1 \hat{\theta}_\mathbf{1} - l_1 \dot{\theta}_1^2 \hat{\rho}_\mathbf{1}$$

$$\mathbf{F_1} = -T_1 \hat{\rho}_\mathbf{1} + T_2 \hat{\rho}_\mathbf{2} + m_1 g \sin(\theta_2 - \theta_1)\hat{\theta}_\mathbf{1} - m_1 g \cos(\theta_2 - \theta_1)\hat{\rho}_\mathbf{1}$$

donde el peso de m_1 está en componentes $\hat{\rho}_\mathbf{1}$, $\hat{\theta}_\mathbf{1}$, y $T_{1,2}$ son las tensiones. Con estas tres ecuaciones a mano es relativamente simple obtener las tensiones en función de aceleraciones, velocidades y coordenadas. Finalmente reemplazando las aceleraciones obtenidas der las ecuaciones de Lagrange se obtienen las tensiones en función de velocidades y coordenadas generalizadas. No es necesario escribir una expresión explícita.