Problema 4 Guía 2: Principio Variacional para resolver en forma aproximada problemas de Mecánica

P4. Considere el movimiento unidimensional de una partícula de masa m sometida al potencial: $V(x) = kx^2/2 + \beta x^4/4$ (potencial anharmónico). La solución de la ecuación de movimiento no se conoce, pero por la forma del potencial, el movimiento es periódico y pasa por $x = 0$ cada medio período, por lo que se prueba con una serie de Fourier de la forma:

$$x(t) = \sum_{n=1} b_n \sin n\omega t,$$

verificandose que en $t_1 = 0$ la partícula está en $x_1 = 0$ y que en $t_2 = \pi/\omega = \tau/2$ la partícula vuelve a $x_2 = 0$. Usar el principio de mínima acción considerando solamente el primer término en la serie de Fourier, para calcular el valor aproximado de la amplitud b en función de la frecuencia ω. Alternativamente exprese la dependencia del período del movimiento τ con la amplitud b. La solución exacta (calculada con un programa de manipulación algebraica) es:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{\sqrt{1+z/2}}K\left(-1+\frac{2}{2+z}\right)$$

siendo K la denominada integral elíptica completa del primer tipo, $z = A^2\beta/k$ y A la amplitud del movimiento. Calcule los factores de corrección dependiente de $z = A^2\beta/k$, definidos por $\tau = \tau_0 f(z)$ donde $\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$ (τ_0 es el período sin término anharmónico), use que ($b \Leftrightarrow A$). Grafique dicho factor de corrección para el resultado variacional y para el resultado exacto para z entre $z = 0$ y $z = 4$. Notar que si bien el procedimiento se puede mejorar usando dos o más términos en la serie de Fourier, ya este cálculo es suficientemente bueno, lo que demuestra la potencia del método variacional.

Principio de Mínima Acción PMA:

El principio de Hamilton de mínima acción, establece:

La trayectoria $q(t)$ seguida por el sistema mecánico para ir entre dos extremos fijos: $q_1 = q(t_1)$ y $q_2 = q(t_2)$ es la que hace mínima (extrema) la acción:

$$S(q(t))) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)dt$$

La trayectoria exacta $q(t)$ es estacionaria ante pequeños, pero arbitrarios cambios $q(t) + \eta(t)$, esta condición conduce a que la trayectoria satisface las ecuaciones de Euler Lagrange.

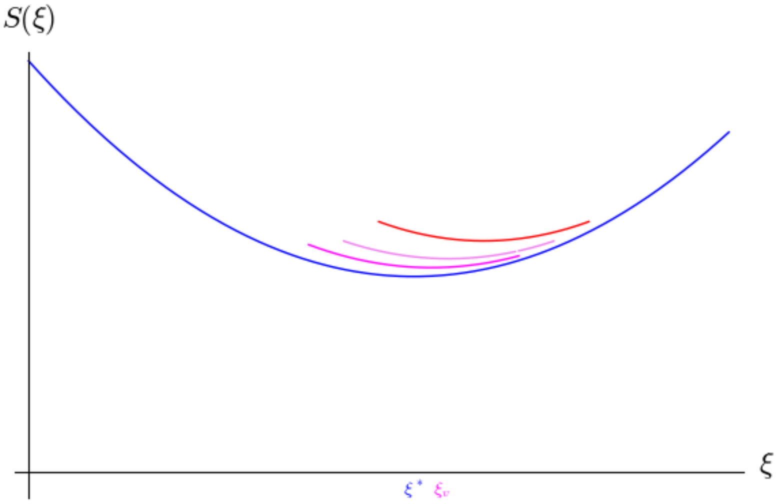
Una forma de usar el PMA para aproximar soluciones de problemas mecánicos es proponer un conjunto de trayectorias que dependen de uno o más parámetros, y que pasen por los extremos fijos . Al minimizar la acción S con respecto a dichos parámetros se obtendrá una trayectoria cercana a la exacta, pues S estaría "cerca" al mínimo exacto S^*.

Para visualizar esto se puede pensar que la funcional acción S es una función del espacio de trayectorias representado como un "punto" (multidimensional) ξ, como muestra la figura. La trayectoria que hace mínima $S(\xi)$ sobre todo el conjunto de trayectorias en la figura es ξ^* .

Una trayectoria variacional aproximada ξ_v, que hacen mínima la acción en un entorno restringido de trayectorias nos dará un valor cercano al mínimo, pero no el valor exacto. Como la acción cerca a la trayectoria correcta varía en términos de segundo orden, si estamos suficientemente cerca la aproximación será buena. En la figura se observa una sucesión de aproximaciones, que nos acercan al valor exacto ξ^* .

In [18]:
```
x0=1.1
y0=1.1
y=plot( y0+ (x-x0)^2,(x,0,2),axes_labels=[r'$\xi$', r'$S(\xi)$'],ticks=[[],[]])
y+=plot(y0+0.2+1.2*(x-x0-0.2)^2,(x,1, 1.6),color='red',ticks=[[],[]])
y+=plot(y0+0.1+1.1*(x-x0-0.1)^2,(x,0.9, 1.5),color='violet',ticks=[[],[]])
y+=plot(y0+0.05+1.05*(x-x0-0.05)^2,(x,0.8, 1.4),color='magenta',ticks=[[],[]])
## txt= text('aproximado', (0.3,0.5),color='magenta')
txt=text(r"$\xi^*$", (1.1, -0.09), color='blue',ticks=[[],[]])
txt+=text(r"$\xi_v$", (1.18, -0.09), color='magenta',ticks=[[],[]])
y+txt
```

Out[18]:



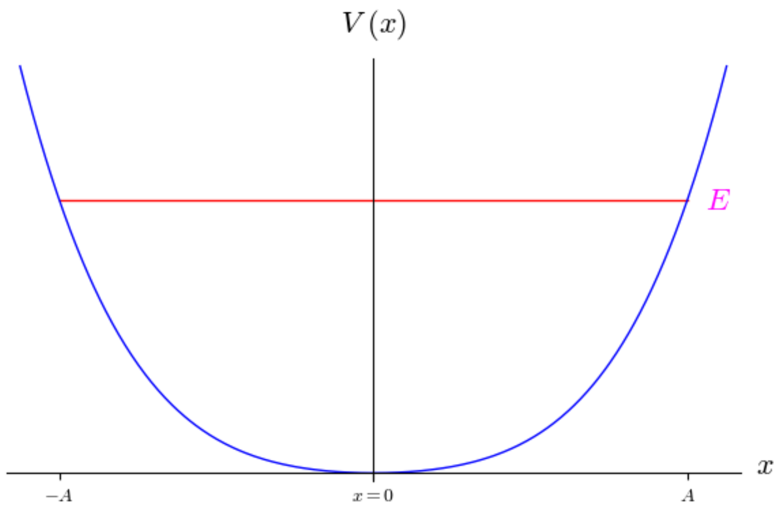
Oscilador anharmónico

En este problema queremos usar el PMA para encontrar solución aproximada del oscilador anharmónico en una dimensión con potencial:

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4}$$

In [40]:
```
y=plot( x^2/2+x^4/4,(x,-2.25,2.25),axes_labels=[r'$x$', r'$V\ (x)$'],ticks=[[-2,0.0001,2],[]],tick_formatter=[["$-A$","$x=0$","$A$"],
[]]);
p=line([(-2,6),(2,6)], color='red')
txt=text("$E$", (2.2, 6), fontsize=16, color='magenta')
p+y+txt
```

Out[40]:



De la figura del potencial se sabe que, la trayectoria:

- Es periódica, la partícula está confinada entre los puntos de retorno. Como tal posee una frecuencia de movimiento ω y un período $\tau = 2\pi/\omega$, en principio dependiente de la energía (amplitud). Sólo en el caso del potencial armónico τ no depende de la amplitud.

- Pasa por $x = 0$ y vuelve a $x = 0$ en medio período π/ω.

- Siendo periódica admite la siguiente expansión en serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=1} b_n \sin(n\omega t)$$

esta expresión de las trayectorias cumple que en $t_1 = 0$, $x_1(t_1) = 0$ y vuelve a pasar por cero luego de medio período $t_2 = \pi/\omega$, $x_2 = x(\pi/\omega)$. Estos datos son los extremos fijos para buscar una solución usando el PMA. Los parámetros a variar son los b_n.

El Lagrangiano es:

$$\mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4}$$

La acción es:

$$S(b_n) \int_0^{\pi/\omega} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$$

Oscilador anharmónico, caso con un parámetro b

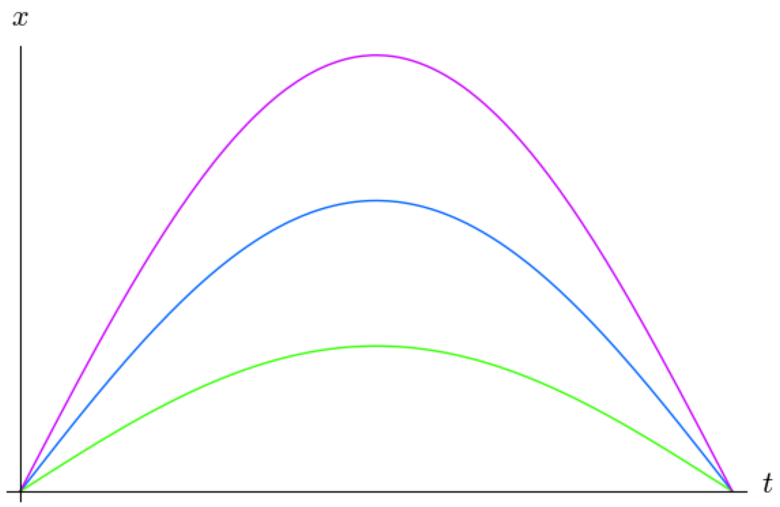
En el presente problema usaremos sólo un término de la serie:

$$x(t) = b\sin(\omega t)$$

En la figura mostramos la dependencia de las trayectorias con el parámetro b (amplitud). Estas trayectorias salen del origen en $t_1 = 0$ y vuelven al origen en $t = \pi/\omega$

In [63]:
```
b=1.
f(x)=b*sin(x)
p1= plot(f, (0,3.141592), color=hue(0.6),axes_labels=[r'$t$', r'$x$'],ticks=[[],[]])
b=0.5
f(x)=b*sin(x)
p2= plot(f, (0,3.141592), color=hue(0.3),axes_labels=[r'$t$', r'$x$'])
b=1.5
f(x)=b*sin(x)
p3= plot(f, (0,3.141592), color=hue(0.8),axes_labels=[r'$t$', r'$x$'])
p1+p2+p3
```

Out[63]:



cálculos auxiliares:

$$x^2(t) = \frac{b^2}{2}(1-\cos(2\omega t)) \quad \Rightarrow \quad x^4(t) = \frac{b^4}{4}\left(1-2\cos(2\omega t)+\cos^2(2\omega t)\right) = \frac{b^4}{4}\left(\frac{3}{2}-2\cos(2\omega t)+\frac{1}{2}\cos(4\omega t)\right)$$

$$\dot{x}(t) = b\omega\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2(t) = \frac{b^2\omega^2}{2}(1+\cos(2\omega t))$$

Expresando la acción $S(b)$

$$S(b) = \int_0^{\pi/\omega} \mathcal{L}(x(t),\dot{x}(t))dt = \frac{m}{2}\int_0^{\pi/\omega}\dot{x}(t)^2 dt - \frac{k}{2}\int_0^{\pi/\omega} x(t)^2 dt - \frac{\beta}{4}\int_0^{\pi/\omega} x(t)^4 dt$$

Usamos que:

$$\int_0^{\pi/\omega}\dot{x}^2(t)dt = b^2\omega^2\frac{\pi}{2\omega}$$
$$\int_0^{\pi/\omega} x^2(t)dt = b^2\frac{\pi}{2\omega}$$
$$\int_0^{\pi/\omega} x^4(t)dt = b^4\frac{3\pi}{8\omega}$$

Obteniendo:

$$S(b) = \frac{b^2\pi}{2\omega}\left(m\omega^2 - k - \frac{3}{8}\beta b^2\right)$$

$$S(b) = \frac{\pi}{2\omega}\left(m\omega^2 b^2 - kb^2 - \frac{3}{8}\beta b^4\right)$$

Imponemos la condición de extremo:

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b} = \frac{\pi}{2\omega}\left(2bm\omega^2 - 2kb - \frac{3}{2}\beta b^3\right) = 0$$

Se obtiene dos soluciones:

- la solución trivial: $b = 0$.

- la solución : $b = \sqrt{\frac{4(m-\omega^2-k)}{3\beta}}$

De esta última solución se puede expresar la frecuencia ω en función de la amplitud b:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1+\frac{3b^2\beta}{2k}}$$

por lo que el período en función de amplitud aproximada b es:

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\frac{1}{\sqrt{1+3z/2}} \qquad \text{donde} \quad z = \frac{b^2\beta}{k}$$

La solución exacta

Usando la conservación de la energía y el MATHEMATICA para evaluar una integral definida se puede calcular exactamente el período en función de la amplitud A:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{\sqrt{1+z/2}}K\left(-1+\frac{2}{2+z}\right)$$

siendo K la denominada integral elíptica completa del primer tipo, $z = A^2\beta/k$ y A la amplitud del movimiento.

Definamos el factor de corrección anharmónica como el factor que multiplica al período del oscilador armónico para dar el período del problema:

$$\tau = \tau_0 f \qquad \text{donde} \quad \tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

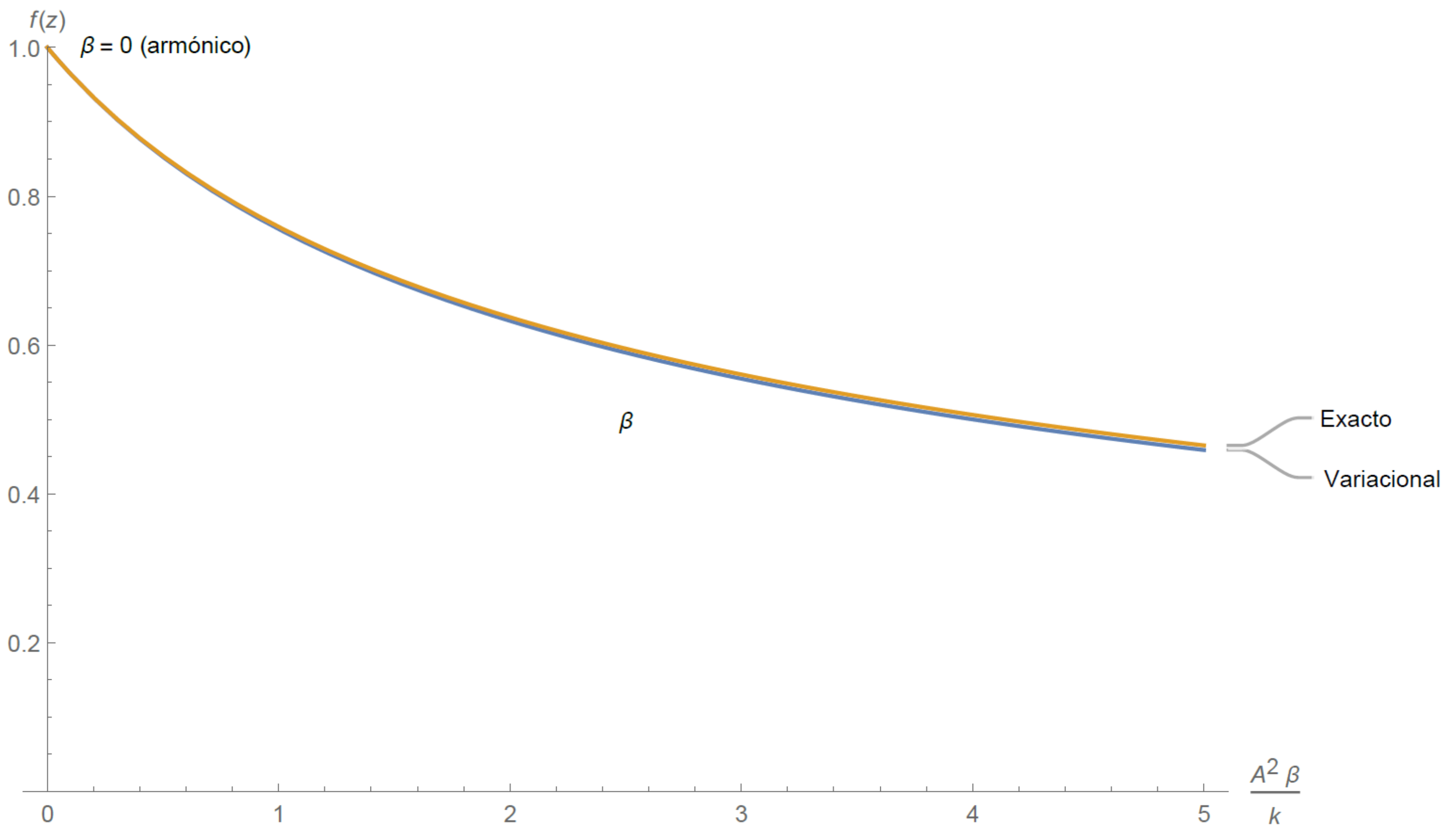
De la expresión exacta de τ se obtiene la corrección anharmónica exacta:

$$f_{ex} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+z/2}}K\left(-1+\frac{2}{2+z}\right)$$

Este valor exacto será comparado con la corrección anharmónica variacional que :

$$f_{ap} = \frac{1}{\sqrt{1+3z/2}}$$

Aunque las fórmulas difieren bastante, la gráfica de ambas funciones son similares en un gran rango de valores de z, como se muestra en el dibujo (naranja:exacto, azul:variacional):



Cálculos algebraicos auxiliares

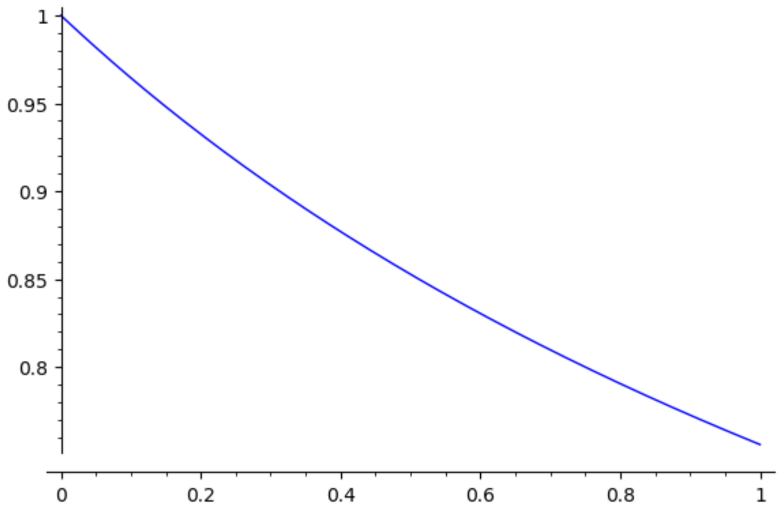
In [105]:
```
var('x,y')   ##   ejemplo de algebra con sage
f = (x^3 - sin(y)*x^2 - 5*x + 3)
g = f.series(x, 4);g
```

Out[105]:
```
3 + (-5)*x + (-sin(y))*x^2 + 1*x^3 + Order(x^4)
```

In [58]:
```
### Expansión cálculo aproximado
var('k','m','z','pi')
f=(1/sqrt(1+(3/4)*z))
tau1=f.series(z,4).truncate()
tau=(2*pi/sqrt(k/m))*tau1
tau.expand().factor().show()
f=(1/sqrt(1+(3/4)*z))
fig1=plot(f,(z,0,1));fig1
```

$$-\frac{\left(135\,z^{3}-216\,z^{2}+384\,z-1024\right)\pi}{512\,\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Out[58]:



Expansión del cálculo exacto

https://www.wolframalpha.com/input/?i=Series%5BEllipticK%5B-1+%2B+2+%2F%282+%2B+z%29%5D%2FSqrt%5B1%2Bz%2F2%5D+%2C%7Bz%2C+0%2C+3%7D%5D (https://www.wolframalpha.com/input/?i=Series%5BEllipticK%5B-1+%2B+2+%2F%282+%2B+z%29%5D%2FSqrt%5B1%2Bz%2F2%5D+%2C%7Bz%2C+0%2C+3%7D%5D)

In [62]:
```
### Expansión cálculo exacto  NO FUNCIONA!!!!!
var('k','m','z','pi')
f=elliptic_kc(-1+1/(1+z/2))/sqrt(1+z/2);f.show()
#tau1=f.series(z,4).truncate()
#tau=(4/sqrt(k/m))*tau1
#tau.expand().show()
#tau=(2*pi/sqrt(k/m))*f.truncate
```

$$\frac{K\left(\frac{2}{z+2}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\,z+1}}$$

In [60]:
```
#  Factor de corrección Anharmónica
g(x,z) = 1/sqrt(1-(1/(1+z/2))*x^2-((z/2)/(1+z/2))*x^4)
npoints=20
intf=[numerical_integral(g, 0, 1, max_points=100, params=[n/npoints]) for n in range(npoints)]
fexact=[[0,intf[0][0]/(1.570796327*sqrt(1+0/2))]];fexact
for n in range(npoints):
    z=n/20.
    fexact.append([z,intf[n][0]/(1.570796327*sqrt(1.+z/2))])
fexact
list_plot(fexact,color='red')+fig1
```

Out[60]: