Problema 5 Guía 2: Optica y Principio de Fermat como Problema Variacional

5. Según el principio de Fermat, la luz sigue una trayectoria que hace extrema la integral $\int_1^2 n(x,y)\,ds$, donde $n(x,y)$ es el índice de refracción del medio que la luz atraviesa. El problema se supone bidimensional. Muestre que si $n(x,y) = n_0(1 + y/h)$, donde n_0 y h son constantes, la trayectoria de la luz está dada por $y = -h + (\alpha h/n_0)\cosh(\beta + n_0 x/\alpha h)$, donde α y β son constantes de integración. (*Ayuda:* considere las ecuaciones de Euler−Lagrange.)

Principio de Fermat:

El principio de Fermat, en óptica, es un principio de tipo variacional (extremal) que establece: El trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo (τ) empleado en recorrerlo es un mínimo.

$$\tau = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

pero $v = \frac{c}{n}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacio y n el índice de refracción del medio.

Por eso se puede definir a nds como el diferencial de camino óptico con lo que también se cumple que

la longitud de camino óptico recorrido (l_{co}) es un mínimo.

$$l_{co} = \int_1^2 n(x,y)\,ds \qquad \text{donde (caso plano vertical)} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Hay dos formas alternativas de buscar ese mínimo:

$$l_{co} = \int_{x_1}^{x_2} n(x,y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$
$$l_{co} = \int_{x_1}^{x_2} n(x,y)\sqrt{1 + x'^2}\,dy, \quad x' = \frac{dx}{dy}$$

Usaremos la primera forma, la segunda se deja para que practiquen.

Análogo Mecánico:

Hemos visto que las ecuaciones de Lagrange hacen extrema la acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q,\dot{q},t)\,dt$$

comparando con:

$$l_{co} = \int_{x_1}^{x_2} n(x,y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

se reconoce las variables análogas: Mecánica $\Leftrightarrow$ Óptica:

$$S \Leftrightarrow l_{co}, \quad \mathcal{L}(q,\dot{q},t) \Leftrightarrow F(y,y',x)$$
$$q \Leftrightarrow y, \quad \dot{q} \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} \quad t \Leftrightarrow x$$

y los extremos fijos en el caso óptico son ahora $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$.

Hecha esta analogía la trayectoria de la luz satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Ecuación de la trayectoria

Hecha la analogía la trayectoria de la luz satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}$$

donde usando que para el problema $n = n_0(1 + y/h))$:

$$F(y,y') = n_0(1+\frac{y}{h}\sqrt{1+y'^2}$$

para evitar plantear (y resolver) una ecuación diferencial de segundo orden en x veamos si tenemos una integral primera (magnitud conservada):

como $F = F(y, y')$, entonces no depende del "tiempo" x, por lo cual se conserva el equivalente al Hamiltoniano:

$$H = y'\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} - F(y,y')$$

para evitar resolver una ecuación diferencial de segundo orden en x veamos si tenemos una integral primera (magnitud conservada):

como $F = F(y, y')$, entonces no depende del "tiempo" x, por lo cual se conserva el equivalente al Hamiltoniano:

$$H = y'\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} - F(y,y')$$

Cálculos algebraicos auxiliares

In [1]:
```
### Cálculos algebraicos auxiliares (solo para demostrar el sage)
var('x','y','yp','alpha','beta','n0','h')
F=n0*(1+y/h)*sqrt(1+yp^2)
H(y,yp)=yp*derivative(F,yp)-F
H(y,yp).simplify_full().collect_common_factors().show() ### Hamiltoniano  expresion.show() muestra la expresion usando latex
```

$$-\frac{(h+y)n_0}{\sqrt{yp^2+1}h}$$

In [57]:
```
y= -h+(alpha*h/n0)*cosh(beta+n0*x/(alpha*h))     ## Trayectoria propuesta como solución
y.show()
```

$$\frac{\alpha h\cosh\left(\beta+\frac{n_0 x}{\alpha h}\right)}{n_0}-h$$

In [30]:
```
yp=y.derivative(x)
yp.show()
(-n0*(h+y)).show()                    ##  Numerador de H
(h*sqrt(1+yp^2)).show()               ##  Denominador de H
```

$$\sinh\left(\beta+\frac{n_0 x}{\alpha h}\right)$$

$$-\alpha h\cosh\left(\beta+\frac{n_0 x}{\alpha h}\right)$$

$$\sqrt{\sinh\left(\beta+\frac{n_0 x}{\alpha h}\right)^2+1}h$$

Conservación de H

Usando la expresión para $F(y,y')$ evaluamos el "Hamiltoniano" que debería conservarse:

$$H = -\frac{(h+y)n_0}{\sqrt{y'^2+1}h}$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden en x para la variable y.

En lugar de resolverla veamos si la solución propuesta en el ejercicio satisface que H no depende de x (se conserva). Usando la solución dada:

$$y(x) = \frac{\alpha h \cosh\left(\beta + \frac{n_0 x}{\alpha h}\right)}{n_0} - h$$

empleando los cálculos auxiliares (es mas fácil hacerlo a mano):

$$(h+y(x))n_0 = -\alpha n_0 h \cosh\left(\beta + \frac{n_0 x}{\alpha h}\right)$$
$$\sqrt{\frac{dy(x)}{dx}^2+1}\,h = h\sqrt{\sinh\left(\beta+\frac{n_0 x}{\alpha h}\right)^2+1} = h\cosh\left(\beta+\frac{n_0 x}{\alpha h}\right)$$

donde se usó la identida de funciones hiperbólicas $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$. Dividiendo estas dos últimas expresiones se obtiene:

$$H = -\alpha \quad \text{constante}$$

Por consiguiente la expresión de $y(x)$ dada en el enunciado satisface una integral primera de la Ecuación de Euler Lagrange (H es constante)) y por consiguiente la luz sigue trayectoria propuesta $y(x)$.

Interpretación física:

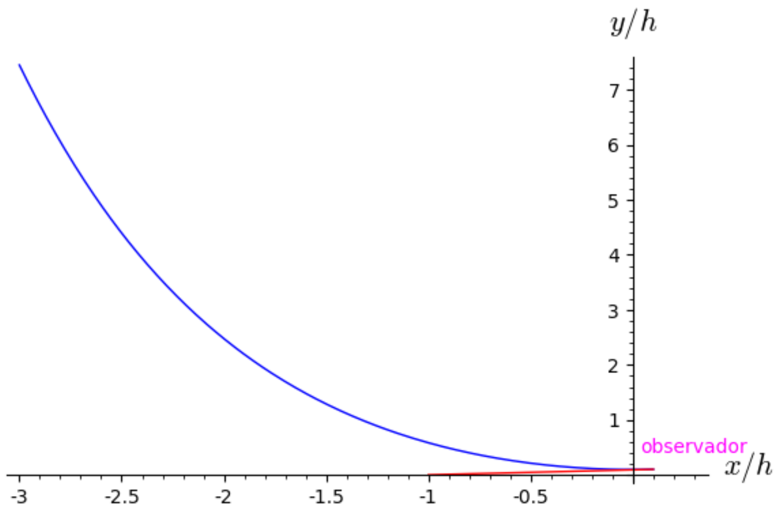
Este es un modelo del comportamiento de la atmósfera en dias cálidos,cuando el asfalto de la ruta se calienta. El índice de refración aumenta con la altura y, pues el aire es mas liviano en contacto con el piso caliente. En nuestra solución elegimos la fase $\beta = 0$, y escaleamos a variables $\frac{x}{h}$ e $\frac{y}{h}$.

En la figura se observa la trayectoria seguida por la luz que se dobla y parece que proviene de un punto más bajo. La visual del observador está alineada con la línea roja de la figura, pero observa luz que proviene de la parte superior de la atmósfera (cielo).

In [1]:
```
from sage.repl.ipython_kernel.interact import interact    # grafico interactivo de Sage usa slider y range_slider
@interact
def fplot(alpha=slider(1,2,0.1,default=1.1),zoom=range_slider(-3,3,0.25,default=(-3,1.5))):
    show(plot(-1+alpha*cosh(x/alpha),(x,zoom[0], zoom[1])))
```

In [2]:
```
alpha=1.1
x0=0.1
y=plot(-1+alpha*cosh(x/alpha),(x,-3, x0),axes_labels=[r'$x/h$', r'$y/h$'])     # @interact no permite guardar la figura, por eso hace
mos el plot  nuevamente
y0=-1+alpha*cosh(x0/alpha)
yp0=sinh(x0/alpha)
y+=plot(y0+(x-x0)*yp0,(x,-1, x0),color='red')
txt= text('observador', (0.3,0.5),color='magenta')
y+txt
```

Out[2]:



Conclusión: En la ruta el asfalto se calienta y uno observa hacia adelante un espejismo, por el cual se tiene la sensación que el piso está mojado.