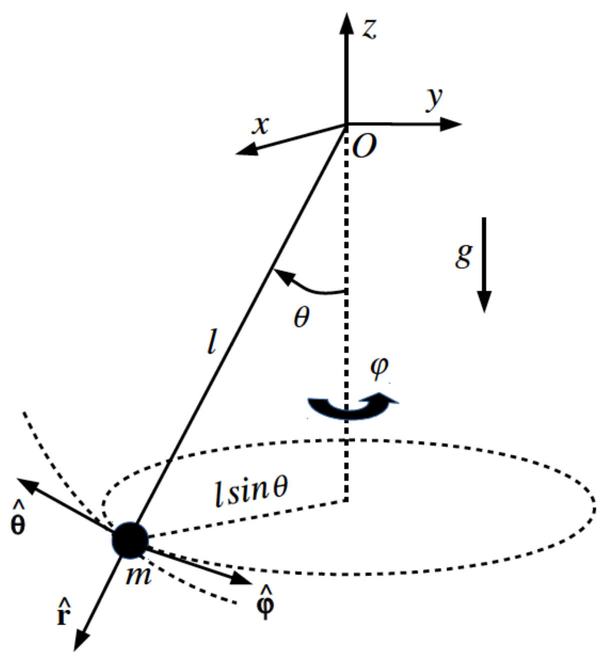
Guía 1: Euler-Lagrange

Mecánica Clásica
2^{do} Cuatrimestre de 2020
Sebastián E. Nuza

Ejercicio 12

Vamos a estudiar el problema del péndulo esférico usando el formalismo Lagrangiano.



Es fácil ver que el número de coordenadas que vamos a necesitar (o sea, aquellas que son **independientes** entre sí) es 2, ya que el largo l de la barra durante el movimiento permanece constante. Es decir, en todo instante, vale la siguiente ecuación de vínculo

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

En general, para calcular el número de **grados de libertad** de un problema (que es igual al número de **coordenadas generalizadas** que vamos a necesitar) hay que hacer #g.d.l. $= 3N - k$, en donde N es el número de partículas y k es el número de ecuaciones de vínculo.

$$N = k = 1 \quad \Rightarrow \quad \#\text{g.d.l.} = 3 \cdot 1 - 1 = 2. \tag{1}$$

Dado que el módulo del vector posición es constante ($|\mathbf{r}|=l$), la partícula se va a mover en la superficie de una esfera. Entonces, es natural usar coordenadas esféricas para describir el movimiento, por lo que nuestras 2 coordenadas generalizadas serán θ y φ. Una vez escrito el Lagrangiano del problema, las ecuaciones de movimiento se obtienen de calcular, sistemáticamente, las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada coordenada generalizada.

En este ejercicio, vamos a hacer el cálculo paso a paso para que les quede como ejemplo. Empecemos por la energía cinética. Una forma segura de escribir T (¡aunque no siempre la más práctica!) es usar coordenadas cartesianas para el vector velocidad $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$:

$$T = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Sabemos que esta definición siempre será válida y, además, es fácil de recordar. Luego, para cada problema particular, hay que encontrar cuál es la relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas generalizadas que estamos utilizando. En este caso, como usamos coordenadas esféricas es fácil ver que (¡ojo con el signo de z![1]):

$$\begin{aligned} x &= l\sin\theta\cos\varphi \;\Rightarrow\; \dot{x} = l(\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta} - \sin\theta\sin\varphi,\,\dot{\varphi}),\\ y &= l\sin\theta\sin\varphi \;\Rightarrow\; \dot{y} = l(\cos\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} + \sin\theta\cos\varphi,\,\dot{\varphi}),\\ z &= -l\cos\theta \qquad\Rightarrow\; \dot{z} = l\sin\theta\,\dot{\theta}, \end{aligned}$$

Entonces, la energía cinética resulta

$$T = \frac{m}{2}\Big(\underbrace{l^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2}_{v_\varphi^2} + \underbrace{l^2\dot{\theta}^2}_{v_\theta^2}\Big).$$

Una forma más práctica de calcular el cuadrado de la velocidad es, por ejemplo, usar la definición de vector velocidad en coordenadas esféricas. En ese caso, pueden obtener el mismo resultado mucho más rápido usando las ortogonalidad de los versores $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \;\;\Rightarrow$$

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = l^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2 \quad (r = l).$$

El peso y el potencial gravitatorio se escriben como

$$m\mathbf{g} = -mg\,\hat{\mathbf{z}} = -\frac{dU_{\mathrm{g}}}{dz}\,\hat{\mathbf{z}} \;\Leftrightarrow\; U_{\mathrm{g}}(z) = mgz + C.$$

Con estas dos cantidades ya podemos escribir el Lagragiano del problema:

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{ml^2}{2}\left(\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta} \tag{2}$$

Una cosa que vamos a hacer mucho es estudiar las simetrías del Lagrangiano. Eso nos va a dar información sobre cantidades conservadas que nos van a ayudar en la interpretación física de los problemas[2].

✓ El Lagrangiano **no depende explícitamente del tiempo** $\Leftrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$.

[1]Notar que la definición usual de coordenada azimutal en esféricas (llamémosle Θ) difiere en un ángulo π respecto del θ que usamos acá: $\theta = \pi - \Theta$.

[2]En la Guía 2 vamos a volver a ver ésto en más detalle.

Interludio: Estudiemos qué ocurre si hacemos la derivada total del Lagrangiano.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \;\Rightarrow\; \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{3}$$

El segundo término dentro de la sumatoria se puede reescribir como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right)\dot{q}_i$$

Si ahora reemplazamos la ecuación anterior en (3) y reordenamos queda:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\sum_i \underbrace{\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right\}}_{=0} \dot{q}_i + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Reordenando términos obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left\{ \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} \right\} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$$

$\boxed{\text{Si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo entonces } h \text{ se conserva}}$

¿Quién es h? En la mayoría de los problemas que vamos a estudiar h será la **energía mecánica** E del sistema. Sin embargo, ésto no siempre es cierto. Por ejemplo, h podría conservarse pero no E (ver Ejercicio 17 de la Guía 0).

En general, $h = E$ cuando:

✓ La energía cinética es una **función homogénea de grado 2 en las velocidades**:

$$T(q_i, \lambda \dot{q}_i, t) = \lambda^2 T(q_i, \dot{q}_i, t)$$

✓ El potencial **no depende de las velocidades**: $U = U(q_i, t)$

Demostración: Por el *teorema de Euler de las funciones homogéneas*[a] vale que:

$$\boxed{T(\mathbf{q}, \lambda\dot{\mathbf{q}}, t) = \lambda^2 T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \;\Rightarrow\; \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} = 2T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}$$

$$\Rightarrow\; h \equiv \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \underbrace{\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}}_{=0}\dot{q}_i \right) - \mathcal{L} = 2T - (T - U)$$

$$\Rightarrow\; \boxed{h = T + U = E}$$

[a] Ustedes pueden probarlo calculando la derivada total respecto de λ en la igualdad $T(q, \lambda\dot{q}, t) = \lambda^2 T(q, \dot{q}, t)$ y luego evaluando en $\lambda = 1$. Van a llegar a que $\dot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 2T$.

✓ El Lagrangiano **no depende de la coordenada** $\varphi \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$. Esto implica que el problema tiene simetría de revolución alrededor del eje z, lo cual está asociado a la conservación de la componente z del momento angular.

> **Nota importante**: En general, si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} = 0 \;\Rightarrow\;$ se dice que la coordenada ζ es *cíclica*. El estudio de las simetrías del Lagrangiano es extremadamente importante y aparecerá, una y otra vez, en distintos contextos que exceden a la Mecánica Clásica.

a) Ecuaciones de Euler-Lagrange:

Como mencionamos anteriormente, las ecuaciones de movimiento salen de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada coordenada usando el Lagrangiano (2):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \qquad (q_1 = \theta,\; q_2 = \varphi)}$$

- $q_1 = \theta$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= ml^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 - mgl\sin\theta \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= ml^2\ddot{\theta} - ml^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + mgl\sin\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\sin\theta = 0} \tag{4}$$

- $q_1 = \varphi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \equiv p_\varphi = \text{constante}} \tag{5}$$

> **Nota importante**: La cantidad p_φ se conoce con el nombre de *momento canónico conjugado* de la coordenada φ. En general, para una coordenada ζ, el momento conjugado de ésta será $p_\zeta \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}}$, el cual puede o no ser constante.

b) Constantes de movimiento:

Como ya mencionamos, la conservación de p_φ se debe a que el Lagrangiano no depende explícitamente de la coordenada φ. Es fácil ver que p_φ no es más que la componente z del momento angular medido desde el punto O (les queda a ustedes chequear la cuenta[3]):

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{L}_O \equiv L_z = ml^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} = p_\varphi. \tag{6}$$

Esta conservación también la podemos ver como hacíamos en Física 1; es decir, calculando el torque externo aplicado sobre la partícula y verificando que la componente z del mismo es cero. Las fuerzas que siente la masita son la tensión de la barra y el peso. Efectivamente, el torque total es

$$\tau_{\text{ext}} = \underbrace{\mathbf{r} \wedge \mathbf{T}}_{=0} + \mathbf{r} \wedge m\mathbf{g} = r\hat{\mathbf{r}} \wedge (-mg\sin\theta\hat{\theta}) = -mgr\sin\theta\,\hat{\varphi}(x,y) \;\Rightarrow\; \tau_{\text{ext},\,z} = 0.$$

Hasta ahora hemos obtenido la **conservación de** L_z. Sin embargo, el problema nos pide encontrar una cantidad conservada adicional. Tal como sospechan, esa cantidad va a ser la **energía mecánica** de la masita. Esto lo pueden ver de distintas maneras:

- Pensando como en Física 1 es fácil ver que la tensión (que es una *fuerza no conservativa*) no hace trabajo por ser $\mathbf{dl} \perp \mathbf{T}$ en todo instante $\Rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{dl} = 0$.
- De la independencia temporal explícita del Lagrangiano deducimos que h se conserva. Luego, como $T(\varphi,\theta,\lambda\dot{\varphi},\lambda\dot{\theta}) = \lambda^2 T(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta})$ y $U \neq U(\dot{\varphi},\dot{\theta}) \;\Rightarrow\; h = E.$
- Integrando una vez la ecuación de movimiento (*primer integral de movimiento*) se llega a la conservación de la energía. Si usamos la conservación de p_φ en la ecuación (4) para θ se obtiene:

$$ml^2\ddot{\theta} - \frac{p_\varphi^2\cos\theta}{ml^2\sin^3\theta} + mgl\sin\theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta\right\} \equiv \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\boxed{E = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta} \tag{7}$$

Volviendo a usar la relación $p_\varphi = ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$ en la ecuación anterior vemos que, efectivamente, E es la energía mecánica de la partícula:

$$\boxed{E = \frac{ml^2}{2}\left(\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right) - mgl\cos\theta = T + U} \tag{8}$$

[3] Notar que $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\theta} = \sin\theta$.

c) Descripción cualitativa del movimiento:

Para entender el movimiento del péndulo cualitativamente podemos usar la ecuación de conservación de la energía (7) notando que la misma puede pensarse como la energía de un problema unidimensional equivalente, con una parte cinética y un *potencial efectivo*, es decir

$$E = E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{ef}}(\theta),$$

$$\boxed{U_{\text{ef}}(\theta) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta} \tag{9}$$

Si queremos tener una idea de cómo se comporta este potencial podemos graficarlo asumiendo un conjunto dado de condiciones iniciales, las cuales, a su vez, determinarán la energía de la masita (a modo de ejemplo, de ahora en más voy a usar $m = 0.5\,\text{kg}$ y $l = 1\,\text{m}$), a saber[4]:

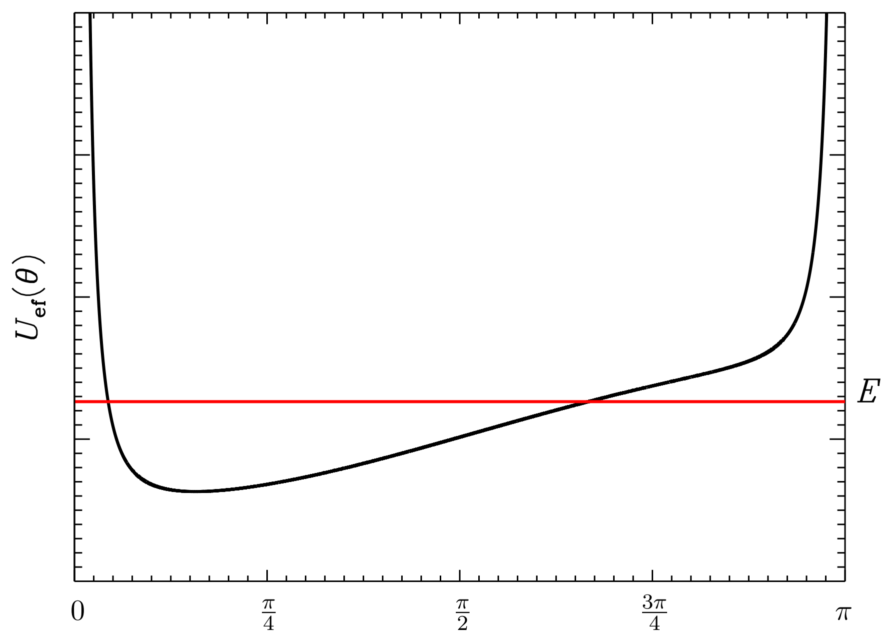


Figura 1: Potencial efectivo para $\theta(0) = \frac{2\pi}{3}$ (120°), $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\dot{\varphi}(0) = 1\,\text{s}^{-1}$.

(*i*) Si $E > U_{\text{ef, min}}$ y $L_z \neq 0$, el movimiento estará acotado entre 2 valores del ángulo θ ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$), en donde se anula la velocidad azimutal: $\dot{\theta}(\theta_{1,2}) = 0$. Es decir, los aǹgulos $\theta_{1,2}$ son *puntos de retorno* del potencial efectivo:

$$U_{\text{ef}}(\theta_{1,2}) = E \;\;\Leftrightarrow\;\; \dot{\theta}(\theta_{1,2}) = 0. \tag{10}$$

Algo interesante que se puede ver fácilmente del gráfico es que la partícula nunca podrá alcanzar las posiciones $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ ya que el potencial diverge. Esto se debe a la conservación de L_z que hará que

[4] De las ecuaciones de movimiento para θ y φ es fácil ver que la solución no depende de m, solo del cociente g/l.

la partícula gire más rápido a medida que se acerca al eje z. De hecho, de la ecuación (6) para p_φ, es fácil ver que $|\dot{\varphi}(\theta = 0, \pi)| \to \infty$. En general, $\dot{\varphi}$ va a estar acotado entre dos valores:

$$\boxed{\frac{L_z}{ml^2 \sin^2\theta_2} \leq \dot{\varphi} \leq \frac{L_z}{ml^2 \sin^2\theta_1}}$$

(ii) Un caso particular interesante es el llamado *péndulo cónico*. Este ocurre cuando la energía de la masita es igual al valor mínimo del potencial, es decir cuando $E = U_{\mathrm{ef,\,min}}$. En este caso, el valor del ángulo azimutal permanecerá constante durante todo el movimiento ($\theta \equiv \theta_* =$ constante). Usando la conservación de L_z es fácil ver que, en este caso, la velocidad angular polar también es constante:

$$\boxed{\dot{\varphi}\Big|_{\theta=\theta_*} = \frac{p_\varphi}{ml^2 \sin^2\theta_*} = \text{constante}}$$

De la ecuación de movimiento (4) para θ podemos calcular el valor de la frecuencia angular polar en términos de la aceleración de la gravedad, el ángulo de apertura del cono y el largo de la barra. Usando que $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_* = 0$ y despejando se obtiene

$$\boxed{\dot{\varphi}\Big|_{\theta=\theta_*} = \pm\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_*}}}$$

(iii) Si elegimos $\dot{\varphi}(0) = 0$ (o sea, $L_z = 0$) en el gráfico de la Figura 1, se obtiene el potencial armónico de un péndulo simple (como debe ser):

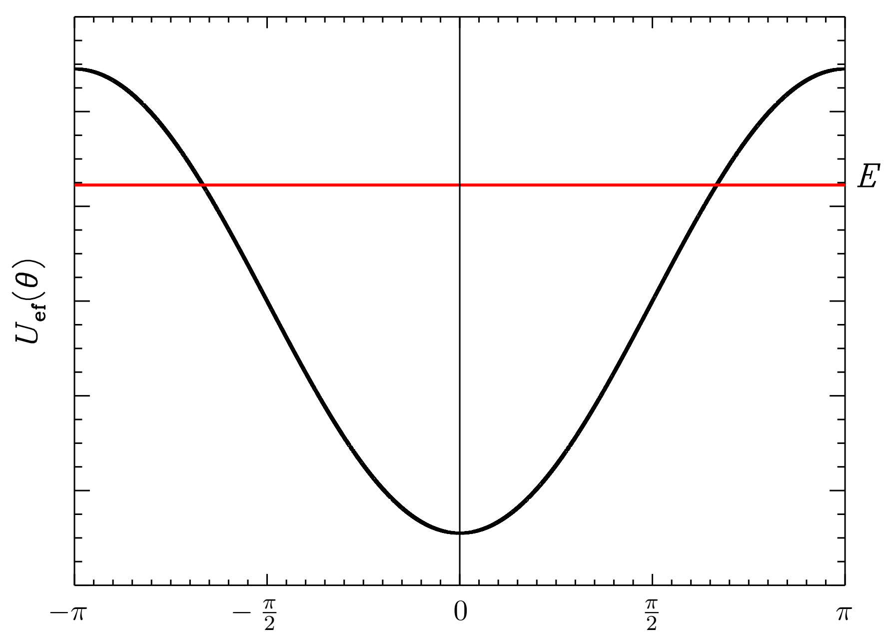
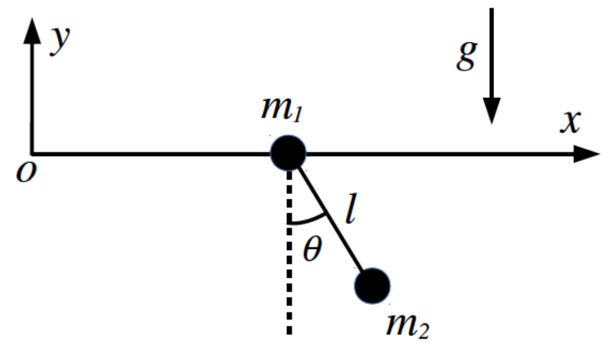


Figura 2: Potencial efectivo para $\theta(0) = \frac{2\pi}{3}$ (120°), $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Ejercicio 17



a) Encuentre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento:

La bolita m_1 está engarzada en el riel y no hay rozamiento. Claramente, el sistema va a tener 2 grados de libertad. Calculemos ésto contando el número de vínculos que tenemos. Los vínculos sobre las dos bolitas son

$$y_1 = z_1 = z_2 = 0,$$
$$(x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = l^2.$$

Tenemos 4 vínculos, entonces el número de grados de libertad será #g.d.l. $= 3N - k = 3 \cdot 2 - 4 = 2$, que es lo que esperábamos. Entonces, como coordenadas generalizadas elegimos a x_1 y θ. Para calcular la energía cinética tenemos que hacer

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

La relaciones entre las coordenadas cartesianas de las partículas y el ángulo θ son

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l\sin\theta \;\Rightarrow\; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\cos\theta\dot{\theta} \\ y_2 &= -l\cos\theta \qquad\;\Rightarrow\; \dot{y}_2 = l\sin\theta\dot{\theta} \end{aligned}$$

El potencial gravitatorio total es

$$U(y_1, y_2) = U_{\mathrm{g},1}(y_1) + U_{\mathrm{g},2}(y_2) = m_2 g y_2. \tag{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x_1}^2 + 2\dot{x}_1\dot{\theta}l\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) + m_2 g l\cos\theta}$$

✓ El Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, entonces h se va a conservar. Ustedes pueden verificar que, en este caso, también $h = E$.

✓ La coordenada x_1 es cíclica, por lo que tendrá asociado un momento conjugado que se va a conservar, a saber

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \equiv p_x = m_1\dot{x}_1 + m_2\underbrace{(\dot{x}_1 + \dot{\theta} l\cos\theta)}_{\dot{x}_2} = \text{constante}.$$

Este momento conjugado se pude reescribir como $p_x \equiv m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$, que no es otra cosa más que la componente x del momento lineal del sistema. Si lo pensamos como en Física 1 pueden ver que para el sistema de las masas y la barra todas las *fuerzas externas* (los pesos y la normal ejercida por el riel) están en la dirección y, entonces

$$\sum_i F_{\text{ext},\,x} = \dot{p_x} = 0 \;\Rightarrow\; p_x = (m_1+m_2)v_{\text{CM},\,x} = \text{ constante } \Rightarrow v_{\text{CM},\,x} = \text{ constante.} \tag{12}$$

En este punto vale la pena hacer un comentario. Si derivamos el momento conjugado se obtiene

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\ddot{x}_2 \;\Rightarrow\; \ddot{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\ddot{x}_1.$$

Esto indica que las dos masitas van a oscilar en contrafase. Si $m_1 = m_2$ las aceleraciones serán opuestas y tendrán igual módulo. Si $m_1 \gg m_2$, entonces $\ddot{x}_1 = 0$, es decir, solo oscilará m_2. Análogamente, si $m_1 \ll m_2$, entonces $\ddot{x}_2 = 0$, solo oscilará m_1 en la dirección x.

En este problema, la derivación de las ecuaciones de Euler-Lagrange les queda a ustedes:

$$\bullet\, \underline{q_1 = x_1}: \quad \frac{dp_x}{dt} = \ddot{x}_1 + \frac{m_2\ddot{\theta} l\cos\theta}{m_1+m_2} - \frac{m_2\dot{\theta}^2 l\sin\theta}{m_1+m_2} = 0 \tag{13}$$

$$\bullet\, \underline{q_2 = \theta}: \quad \ddot{x}_1 + l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \tag{14}$$

Si despejamos $\ddot{x}_1$ de la ecuación de Euler-Lagrange (13) y reemplazamos en (14) obtenemos:

$$\boxed{\ddot{\theta}\Big\{(m_1+m_2)l - m_2 l\cos^2\theta\Big\} + \sin\theta\Big\{m_2 l\cos\theta\dot{\theta}^2 + (m_1+m_2)g\Big\} = 0} \tag{15}$$

Esta es la ecuación de movimiento para la coordenada θ. Si uno fuese capaz de integrarla para obtener la solución $\theta(t)$ simplemente habría que reemplazar ésta, y sus derivadas, en (13) o (14) para encontrar $\ddot{x}_1(t)$ y, luego, integrar dos veces para obtener $x(t)$. Este es un lindo problema para resolver numéricamente. Sin embargo, para que el problema sea resoluble analíticamente nos piden resolver las ecuaciones de movimiento en la aproximación de pequeñas oscilaciones.

b) Pequeñas oscilaciones:

La posición de equilibrio estable será, evidentemente, $\theta_{\text{eq}} = 0$. Esto lo pueden chequear reemplazando $\theta = \theta_{\text{eq}} = 0$ en la ecuación de movimiento (15) y van a obtener que $\ddot{\theta}_{\text{eq}} = 0$. Entonces, si hacemos un desarrollo de Taylor a primer orden alrededor de $\theta_{\text{eq}} = 0$ queda

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \theta + \mathcal{O}(\theta^3) \sim \theta, \\ \cos\theta &= 1 + \mathcal{O}(\theta^2) \sim 1. \end{aligned}$$

Reemplazando estas aproximaciones en la ecuación (15), y usando que $\dot{\theta}^2 \sim 0$, llegamos a la ecuación del oscilador armónico:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}\theta = 0} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}} \tag{16}$$

Además, es fácil ver que en la aproximación de pequeñas oscilaciones vale

$$\boxed{\ddot{x}_1 = \frac{m_2 g}{m_1}\theta} \tag{17}$$

• Utilizando ésta relación es posible calcular $x_1(t)$ a partir de la solución para $\theta(t)$. En este punto les dejo a ustedes que supongan condiciones iniciales adecuadas para encontrar la solución $\theta(t)$ y terminen de resolver el problema.