Guía 2: Simetrías

Mecánica Clásica
2^{do} Cuatrimestre de 2020
Sebastián E. Nuza

Conservaciones y Teorema de Noether

Hasta ahora hemos visto que es posible obtener la conservación de ciertas cantidades a través de las propiedades del Lagrangiano. Por ejemplo, sabemos que si el Lagrangiano **no depende explícitamente del tiempo** la cantidad h se conserva, siendo

$$\boxed{h \equiv \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}} \tag{1}$$

en donde N es el número de grados de libertad y $h = E$ (energía mecánica del sistema) si se cumple que la energía cinética T es una función homogénea de grado 2 en las velocidades ($T(\mathbf{q}, \lambda\dot{\mathbf{q}}, t) = \lambda^2 T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$) y que el potencial V no depende de las velocidades generalizadas ($V \neq V(\dot{\mathbf{q}})$).

Por otro lado, sabemos que si la coordenada ζ es **cíclica** (es decir, $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(\zeta)$) entonces

$$\mathcal{L} = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t) \;\Rightarrow\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}} \equiv p_\zeta = \text{ constante}}$$

Para saber qué representa el momento conjugado p_ζ hagamos la cuenta:

$$p_\zeta = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\zeta}} = \frac{\partial (T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t))}{\partial \dot{\zeta}} = \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\zeta}}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j v_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j\, \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\zeta}} = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\zeta}}} \tag{2}$$

<u>¿Qué implica esto último en el caso de una traslación rígida?</u>

Una traslación rígida se puede describir mediante la transformación $\zeta \to \zeta + \delta\zeta$, en donde $\delta\zeta$ es un desplazamiento arbitrario de la coordenada ζ, el mismo para todas las partículas. En ese caso, la variación en la posición de la partícula i se puede escribir como

$$\delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, ..., q_{N-1}, \zeta + \delta\zeta) - \mathbf{r}_i(q_1, ..., q_{N-1}, \zeta) = \delta\zeta\, \hat{\boldsymbol{\zeta}} \;\Rightarrow\; \boxed{\lim_{\delta\zeta \to 0} \frac{\delta\mathbf{r}_i}{\delta\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \zeta} = \hat{\boldsymbol{\zeta}}} \tag{3}$$

Antes de seguir, calculemos cuánto vale el vector normal $\hat{\boldsymbol{\zeta}} = \partial \mathbf{r}_i / \partial \zeta$:

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d\left(\mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)\right)}{dt} = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j}_{} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

$$\mathbf{q} = (q_1, ..., q_{N-1}, \zeta) \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \overbrace{\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \zeta} \dot{\zeta}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

Derivando la expresión anterior con respecto a $\dot{\zeta}$ solo sobrevive el segundo término, entonces

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\zeta}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \zeta} = \hat{\boldsymbol{\zeta}}} \tag{4}$$

Reemplazando (4) en la ecuación (2) obtenemos

$$\boxed{p_\zeta = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\boldsymbol{\zeta}} \equiv P_\zeta}$$

Conclusión: El momento canónico conjugado p_ζ de una **coordenada cíclica** ζ cuya variación representa una **traslación rígida** es el **momento lineal proyectado** P_ζ en la dirección de esa coordenada.

✓ Un resultado similar para el **momento angular** respecto de un eje de simetría puede obtenerse en el caso de una **coordenada cíclica** θ cuya variación represente una **rotación rígida** ($\theta \to \theta + \delta\theta$) alrededor de dicho eje. Eso se los dejo a ustedes para que lo piensen. Los argumentos son totalmente análogos.

• Volvamos a la traslación rígida. Fíjense que al hacer dicha transformación el Lagrangiano permanece invariante (recordar que $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(\zeta)$):

$$\zeta \to \zeta' = \zeta + \delta\zeta \;\; (\delta\zeta = \text{constante}) \;\Leftrightarrow\; p_\zeta = \text{constante} \;\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{L}(q_1, ..., q_{N-1}, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_{N-1}, \dot{\zeta}) = \mathcal{L}(q_1, ..., q_{N-1}, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_{N-1}, \dot{\zeta}')$$

Esto sugiere que una simetría del Lagrangiano se puede traducir en una cantidad conservada concreta. En nuestro ejemplo es el momento lineal proyectado en una dada dirección. Para generalizar este resultado vamos a estudiar lo que se conoce como **teorema de Noether**.

Nota: En esencia, lo que dice el teorema de Noether es que cada *simetría continua* del Lagrangiano supone la existencia de una cantidad conservada.

<u>**Demostración:**</u> Supongamos un Lagrangiano invariante ante la siguiente transformación infinitesimal:

$$q_j \to q'_j = q_j + \epsilon K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t)$$

en donde $\epsilon \ll 1$ y la función $K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ determina el tipo de transformación que estoy haciendo en cada coordenada generalizada. Si pasamos el Lagrangiano sin transformar a la derecha e integramos en el tiempo se obtiene

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\right\} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta\mathcal{L}\, dt = 0$$

siendo $\delta\mathcal{L}$ la variación del Lagrangiano, la cual debe ser nula. Como las variaciones $\delta q_j = \epsilon K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ son tan pequeñas como uno desee, entonces podemos desarrollar $\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t)$ *a primer orden* alrededor del punto multidimensional $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta\mathcal{L}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{\delta q_j} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\delta t}_{=0}\right) dt = 0 \tag{5}$$

El último término del desarrollo es cero ya que t permanece fijo ($\delta t = 0$). Usando la regla del producto de la derivada podemos escribir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{\delta q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j.$$

Si ahora reemplazamos la expresión anterior en la ecuación (5) obtenemos

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_j \underbrace{\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\right\}}_{=0} \delta q_j\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) dt = 0 \Leftrightarrow \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big|_{t_0} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big|_{t_1}$$

Como t_0 y t_1 son arbitrarios y $\delta q_j = \epsilon K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ entonces

$$\boxed{\sum_j p_j K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \text{constante}} \tag{6}$$

Esta es la versión del **teorema de Noether** con la que vamos a trabajar nosotros. Lo que descubrimos es que si tengo una *simetría continua* en el Lagrangiano entonces vamos a tener la cantidad conservada (6). Noten que si $K_\zeta =$constante (y el resto de las K's es igual a cero) se recupera el caso de ζ cíclica que vimos más arriba. Por lo tanto, este teorema viene a generalizar las nociones de simetría que vimos en la Guía 1.

Es posible extender este resultado para transformaciones más generales que incluyan al tiempo:

$$q_j \to q_j' = q_j + \epsilon K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$
$$t \to t' = t + \epsilon \Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

tal que se cumpla que

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') + \epsilon \frac{dF(\mathbf{q}', t')}{dt'} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Recuerden que el Lagrangiano puede diferir en una derivada total y la física del problema no cambia. En este caso, la derivación del teorema es parecida aunque es un poco más complicada (ver paper adjunto). Si hacen las cuentas van a llegar a que

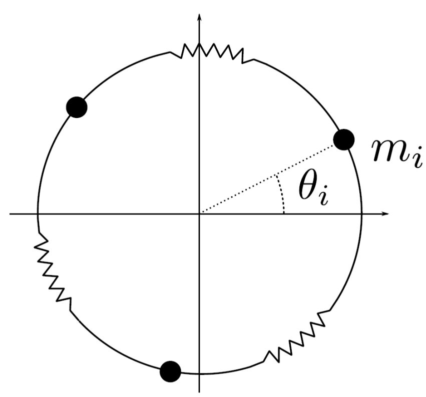
$$\int_{t_0'}^{t_1'} \frac{d}{dt'} \left\{ \sum_j p_j K_j - \underbrace{\left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \right)}_{h} \Theta + F \right\} dt' = 0$$

Entonces, la cantidad conservada resulta

$$\boxed{\sum_j p_j K_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - h\Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + F(\mathbf{q}, t) = \text{constante}}$$

Esta expresión es una generalización del resultado que obtuvimos en (6). Fíjense que ahora aparece h dentro de la conservación. Otra vez, vemos que Noether generaliza las simetrías del Lagrangiano que vimos antes. Por ejemplo, si $F = K_i = 0$ y $\Theta =$constante (invariancia temporal del Lagrangiano) recuperamos el resultado de la conservación de h que ya conocemos.

Ejercicio 10



Las masas interactúan a través de resortes especiales cuyo potencial es $V(\theta_i, \theta_j) = \frac{k}{2}(\theta_i - \theta_j)^2$. En base a las simetrías del Lagrangiano hallar qué magnitudes se conservan.

El Lagrangiano del sistema se puede escribir como

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}R^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}R^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{m_3}{2}R^2\dot{\theta}_3^2 - V(\theta_1, \theta_2, \theta_3),$$
$$V(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{k}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{k}{2}(\theta_2 - \theta_3)^2 + \frac{k}{2}(\theta_3 - \theta_1)^2 .$$

Es fácil ver que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; h = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \text{constante.}$$

Les queda a ustedes corroborar que : $\boxed{h = \sum_i \frac{m_i}{2}R^2\dot{\theta}_i^2 + V(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = E}$

El objetivo principal de este problema es darse cuenta que las coordenadas θ_i **no son cíclicas** pero que igual podemos encontrar una cantidad conservada aplicando el **teorema de Noether**. Es fácil ver que el Lagrangiano permanece invariante ante la siguiente transformación (¿por qué?):

$$\theta_i \to \theta_i + \epsilon K \;\; (\epsilon \ll 1;\;\; K = \text{constante})$$

Entonces, según Noether (ecuación (6)):

$$\sum_{i=1}^{3} p_{\theta_i} K = (p_{\theta_1} + p_{\theta_2} + p_{\theta_3})\, K = \text{constante} \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_3} = \text{constante.}$$

Esta cantidad resulta ser el **momento angular en z respecto del origen** que, como uno esperaría, tiene que ser constante porque, para el sistema de las 3 masas, las fuerzas elásticas son internas y las normales al aro no hacen torque, entonces

$$\boxed{L_z = m_1 R^2\dot{\theta}_1 + m_2 R^2\dot{\theta}_2 + m_3 R^2\dot{\theta}_3 = \text{constante}}$$

Ejercicio 11

¿Qué componentes de **P** y **L** se conservan para el movimiento de una partícula en los siguientes campos?

c) Simetría cilíndrica:

Las equipotenciales son cilindros infinitos; es decir, en las superficies de $R =$constante el potencial no varía $\Rightarrow$ no hay dependencia en $(\theta, z) \Rightarrow\;\; V = V(R)$. El Lagrangiano en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - V(R).$$

$$\checkmark\ \underline{\text{Extra}}:\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}=0\ \Rightarrow\ \boxed{h=E=\frac{m}{2}\left(\dot{R}^2+R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2\right)+V(R)=\text{constante}}$$

Si pensamos en una traslación en z y una rotación en θ obtenemos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}=\boxed{p_z=m\dot{z}=\text{constante}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=\boxed{p_\theta=mR^2\dot{\theta}=L_z=\text{constante}}$$

El Lagrangiano **no permanece invariante** ante una traslación en R:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R}=mR\dot{\theta}^2-\frac{dV}{dR}=\frac{L_z^2}{mR^3}-\frac{dV}{dR}\ \Rightarrow\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{R}}=\boxed{p_R\neq\text{constante}}$$

d) <u>Simetría helicoidal:</u>

Las equipotenciales son helicoides de radio constante ($\dot{R}=0$); es decir, si nos movemos a lo largo del helicoide el potencial no varía. Sin embargo, para determinar el potencial, hay que especificar cada punto del helicoide $\Rightarrow\ V=V(R,\theta,z)$. El Lagrangiano en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\mathcal{L}=\frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2\right)-V(R,\theta,z).$$

$$\checkmark\ \underline{\text{Extra}}:\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}=0\ \Rightarrow\ \boxed{h=E=\frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2\right)+V(R,\theta,z)=\text{constante}}$$

El Lagrangiano **no permanece invariante** ante una traslación en z o una rotación en θ:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=-\frac{\partial V}{\partial\theta}\ \Rightarrow\ \boxed{p_\theta\neq\text{constante}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}=-\frac{\partial V}{\partial z}\ \Rightarrow\ \boxed{p_z\neq\text{constante}}$$

• <u>Addendum</u>: Los momentos conjugados p_θ y p_z **no se conservan** por separado. Sin embargo, es posible encontrar una cantidad conservada que involucra ambas cantidades mediante el **teorema de Noether**. Para ésto es necesario encontrar una **transformación de coordenadas** que *mueva a la partícula sobre el helicoide equipotencial* y que, a su vez, deje invariante el Lagrangiano:

$$z\to z'=z+\epsilon K_z\quad(K_z=\text{constante})\ \Rightarrow\ \dot{z}'=\dot{z}$$
$$\theta\to\theta'=\theta+\epsilon K_\theta\quad(K_\theta=\text{constante})\ \Rightarrow\ \dot{\theta}'=\dot{\theta}$$

La parte cinética del Lagrangiano es invariante frente a esta transformación. La misma implica una traslación en z y una rotación en θ **simultáneas**, de manera tal de poder recorrer el helicoide, sobre el cual sabemos que $V = V(R, \theta, z)$ permanece invariante. En un helicoide, la relación entre la coordenada z y la θ viene dada por

$$z = \frac{H}{2\pi}\theta + \text{constante} \;\Rightarrow\; \boxed{\delta z = \frac{H}{2\pi}\delta\theta}$$

Usando que $\delta z = \epsilon K_z$ y $\delta\theta = \epsilon K_\theta$ es fácil encontrar la relación entre las dos funciones K_i de la transformación:

$$\boxed{K_z = \frac{H}{2\pi}K_\theta}$$

A partir de esta última relación podemos construir la cantidad conservada que se obtiene mediante la ecuación (6), es decir

$$\sum_{i=1}^{2} p_i K_i = p_z K_z + p_\theta K_\theta = \left(p_z \frac{H}{2\pi} + p_\theta\right) K_\theta = \text{constante} \;\Leftrightarrow\; \boxed{p_z \frac{H}{2\pi} + p_\theta = \text{constante}}$$

Ejercicio 12

¿Cómo serían las órbitas de los planetas si el potencial gravitatorio solar tuviera simetría cilíndrica?

Recordemos que el potencial gravitatorio se escribe como $V(R) = -GMm/R$. En este problema el Lagrangiano será igual al del Ejercicio 11c) que vimos más arriba, es decir

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{GMm}{R}.$$

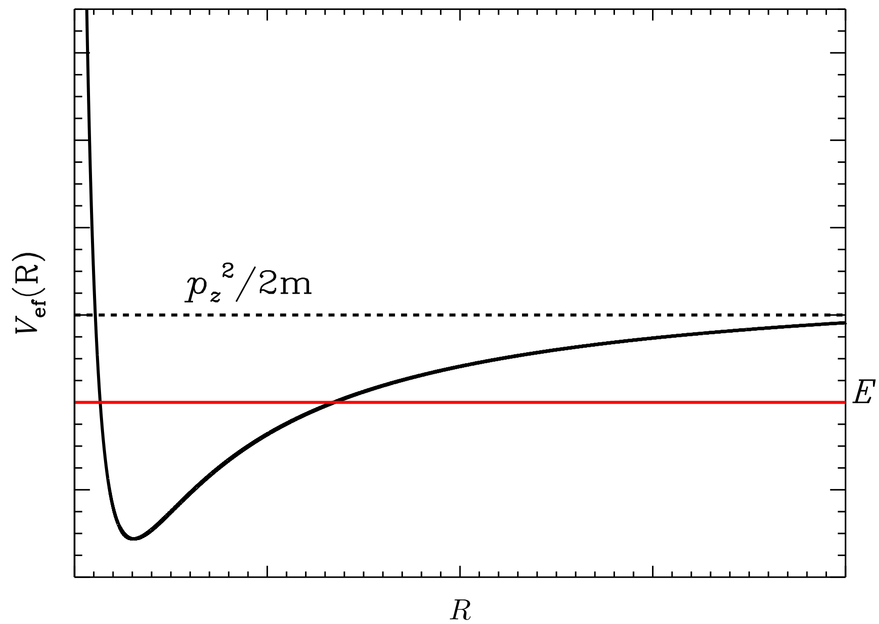
Del ejercicio anterior sabemos que $p_z = m\dot{z}$ y $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$ se conservan. Ustedes pueden comprobar fácilmente que $h = E = \text{constante}$. La energía resulta

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{GMm}{R}.$$

Utilizando las conservaciones de p_z y p_θ podemos reducir el problema original a un problema equivalente unidimensional como hicimos en las clases pasadas. Es decir, podemos escribir el siguiente potencial efectivo:

$$E(R, \dot{R}) = \frac{m}{2}\dot{R}^2 + V_{\text{ef}}(R) \;\Leftrightarrow\; \boxed{V_{\text{ef}}(R) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R} + \frac{p_z^2}{2m}}$$

Este potencial efectivo tiene la siguiente forma (las unidades son arbitrarias):



Orbitas planas ($p_z = 0$)**:** Si $E < p_z^2/2m$, la órbita del planeta será ligada y describirá elípses en el plano. Si $E = p_z^2/2m$, el planeta tendrá una órbita parabólica. Si $E > p_z^2/2m$, el planeta seguirá órbitas hiperbólicas. Esto deberían recordarlo de Física 1. Igual no se preocupen que lo vamos a volver a ver en la Guía 3.

Orbitas "tipo-helicoidales" ($p_z \neq 0$)**:** Idem a lo anterior pero con una componente no nula de la velocidad en la dirección z. Recordar que $p_z = \text{constante} \Rightarrow \dot{z} = \text{constante}$.