**Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2020**

**Guía 2:** *Principios variacionales y simetrías*

## Principios variacionales

1. Suponga que sabe experimentalmente que una partícula cae una distancia dada $y_d$ en un tiempo $t_d = \sqrt{2y_d/g}$, pero no se conoce el tiempo de caída para otras distancias distintas de $y_d$. Suponga además que el lagrangiano del problema se conoce, pero en lugar de resolver la ecuación de movimiento se prueba una forma funcional $y(t) = bt + ct^2$. Si las constantes $a$, $b$, y $c$ se ajustan de modo que $y_d$ esté determinado correctamente por $t_d$, muestre que la integral $I = \int \mathcal{L}\, dt$ resulta un extremo para valores reales de los coeficientes sólo cuando $b = 0$ y $c = -g/2$.

2. Una partícula se encuentra sometida a un potencial de tipo gravitatorio, $V(r) = -k/r$. Suponiendo que las órbitas son circulares, encuentre la relación entre los períodos y los radios de las órbitas utilizando el principio variacional de Hamilton. [*Ayuda*: considere la ecuación paramétrica de la elipse, $x(\theta) = a\cos\theta, y(\theta) = b\sin\theta$, y apartamientos de la trayectoria circular variando $a$ o $b$.]

3. Una partícula en uina dimensión está sometida solamente a un potencial $V(x)$. Encuentre la trayectoria $x(t)$ minimizando la acción entre $x(t_0) = x_0$ y $x(t_n) = x_n$ de la siguiente manera:

   (a) Divida el intervalo de integración en $n$ partes.

   (b) Reemplace las derivadas por su valor medio, $\dot{x}_i = \Delta x_i/\Delta t_i$, y la integral por una sumatoria.

   (c) Imponga la condición de extremo $\partial I/\partial x_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$

   (d) Tome el límite para $t_i \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$.

   (e) Interprete el resultado. Notar que para una partición finita del intervalo el procedimiento provee un método patra la solución numérica del problema (método de diferencias finitas).

4. Considere el movimiento unidimensional de una partícula de masa $m$ sometida al potencial: $V(x) = kx^2/2 + \beta x^4/4$ (potencial anharmónico). La solución de la ecuación de movimiento no se conoce, pero por la forma del potencial, el movimiento es periódico y pasa por $x = 0$ cada medio período, por lo que se prueba con una serie de Fourier de la forma:

$$x(t) = \sum_{n=1} b_n \sin n\omega t,$$

verificandose que en $t_1 = 0$ la partícula está en $x_1 = 0$ y que en $t_2 = \pi/\omega = \tau/2$ la partícula vuelve a $x_2 = 0$. Usar el principio de mínima acción considerando solamente el primer término en la serie de Fourier, para calcular el valor aproximado de la amplitud $b$ en función de la frecuencia $\omega$. Alternativamente exprese la dependencia del período del movimiento $\tau$ con la amplitud $b$. La solución exacta (calculada con un programa de manipulación algebraica) es:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{\sqrt{1 + z/2}} K\left(-1 + \frac{2}{2 + z}\right)$$

siendo $K$ la denominada integral elíptica completa del primer tipo, $z = A^2\beta/k$ y $A$ la amplitud del movimiento. Calcule los factores de corrección dependiente de $z = A^2\beta/k$ , definidos por $\tau = \tau_0 f(z)$

donde $\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$ ($\tau_0$ es el período sin término anharmónico), use que ($b \Leftrightarrow A$). Grafique dicho factor de corrección para el resultado variacional y para el resultado exacto para $z$ entre $z = 0$ y $z = 4$. Notar que si bien el procedimiento se puede mejorar usando dos o más términos en la serie de Fourier, ya este cálculo es suficientemente bueno, lo que demuestra la potencia del método variacional.

5. Según el principio de Fermat, la luz sigue una trayectoria que hace extrema la integral $\int_1^2 n(x,y)\,ds$, donde $n(x,y)$ es el índice de refracción del medio que la luz atraviesa. El problema se supone bidimensional. Muestre que si $n(x,y) = n_0(1 + y/h)$, donde $n_0$ y $h$ son constantes, la trayectoria de la luz está dada por $y = -h + (\alpha h/n_0)\cosh(\beta + n_0 x/\alpha h)$, donde $\alpha$ y $\beta$ son constantes de integración. (*Ayuda:* considere las ecuaciones de Euler$-$Lagrange.)

6. Demuestre, a partir del principio de acción estacionaria, que las ecuaciones de movimiento quedan inalteradas si al lagrangiano se le suma la derivada total respecto del tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.

7. *Hallar la curva de longitud mínima que une dos puntos de la superficie de un cilindro.

8. *Cuando se arroja un objeto hacia arriba, desde la superficie terrestre y con velocidad inicial $v_0$, el tiempo que transcurre hasta que vuelve a tocar tierra resulta $t_c = 2v_0/g$. A partir de una función de prueba dada por

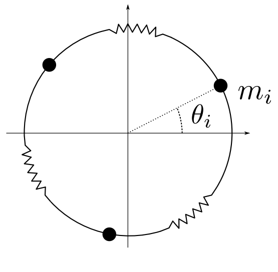
$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big],$$

con $\omega = 2\pi/t_c$, encuentre la mejor aproximación a la trayectoria con el criterio del principio de Hamilton. Utilizando el valor que toma la acción para dicha trayectoria, compare la solución obtenida con la correspondiente al resultado $y(t) = v_0 t - gt^2/2$. >¿Qué conclusiones saca?

9. *Muestre que el lagrangiano $\mathcal{L}(q,\dot{q},\ddot{q},t) = a\ddot{q} + bt\ddot{q} + \mathcal{L}'(q,\dot{q},t)$, ($a$ y $b$ son constantes arbitrarias) conduce a ecuaciones de movimiento que son de segundo orden.

## Simetrías

10. Tres masas $m_1$, $m_2$ y $m_3$ están enhebradas en un aro circular fijo. Las masas interactúan a través de ciertos resortes, cuyo potencial es $V(\theta_i,\theta_j) = \frac{1}{2}k(\theta_i - \theta_j)^2$, donde $i,j = 1,2,3$, y $k$ es una constante. En base a la simetría del lagrangiano $-$teorema de Noether$-$ hallar qué magnitudes se conservan.




11. ¿Qué componentes de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{L}$ se conservan para el movimiento de una partícula en los siguientes campos?

    (a) El producido por un elipsoide completamente asimétrico ($a \neq b \neq c$).

(b) El producido por un plano infinito.

(c) El producido por un cilindro circular infinito.

(d) El producido por una hélice circular infinita.

(e) El producido por una red unidimensional de puntos separados uno del otro una distancia $d$.

(f) El producido por un toro circular.

12. ¿Cómo serían las órbitas de los planetas si el potencial gravitatorio tuviera simetría cilíndrica?

13. Dos partículas de masa $m_1$ y $m_2$ interactúan con un potencial $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Demuestre explícitamente que para que se conserve el impulso angular es necesario que $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$.

14. Calcule las constantes de movimiento para una partícula en el espacio, en un campo electromagnético, con potenciales:

    (a) $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x, y)$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A(x, y)\,\hat{z}$.

    (b) $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x^2 + y^2, z)$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv A(x^2 + y^2, z)\,\hat{z}$.