# GUÍA 3 - EJERCICIO 4

Mecánica Clásica
2doC - 2020

Alumna: Camila Cristiano Romero

Problema: Una partícula se mueve bajo la influencia de un potencial central $V(r) = \frac{K}{r^2}$:

(a) Ecuación de la trayectoria para potencial repulsivo y $E > 0$.

→ Voy a empezar calculando el Lagrangiano del problema:

$$L = T - V$$

↳ Asumo que el movimiento de la partícula se da en un plano (bidimensional) y entonces elijo las coordenadas polares como coordenadas generalizadas para describir este movimiento:

- $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$
- $V = \frac{K}{r^2}$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{K}{r^2}} \quad (1)$$

→ Ya obtenida la expresión del Lagrangiano (1), veo que no depende explícitamente del tiempo, la energía cinética es homogenea de grado 2 en las velocidades y V no depende de las velocidades. Estas son condiciones necesarias para decir que la energía se conserva.

$$\boxed{E = T + V = cte} \quad (2)$$

→ Ahora busco las ecuaciones de movimiento :

$(\hat{r})$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r}$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r} \\ &\bullet \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 + \frac{2K}{r^3} \end{aligned}\right\} \boxed{m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 + \frac{2K}{r^3}}$$

$(\hat{\varphi})$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \\ &\bullet \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\dot{\varphi}r^2 \end{aligned}\right\} \frac{d}{dt}\left(m\dot{\varphi}r^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[m\dot{\varphi}r^2 = cte\right]$$

↳ esto me dice que la coordenada $\varphi$ es cíclica y que el momento angular se conserva

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}} \quad (3) \longleftarrow mr^2\dot{\varphi} = L \longleftarrow$$

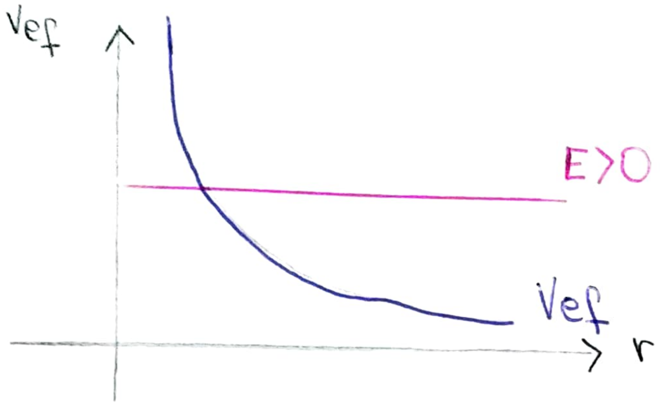
→ Si reemplazo (3) en la energía (2) llego a la siguiente expresión :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r^2}$$

$$(4) \quad \boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\bar{L}^2}{2mr^2}} \quad \xrightarrow{\text{con}} \quad \bar{L}^2 = L^2 \cdot \alpha^2 \ , \ \alpha^2 = 1 + \frac{2Km}{L^2}$$

↳ energía de un problema unidimensional equivalente con un término cinético y uno que es un potencial efectivo.

Entonces $\longrightarrow$ $\boxed{V_{ef}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2}}$ (5)




$\rightarrow$ Lo que se puede analizar del gráfico es que la trayectoria de m tendrá un mínimo acercamiento al CM cuando $E = V_{ef}(\dot{r}=0)$ y se alejará hacia el infinito.

$\rightarrow$ Para obtener la forma geométrica de la trayectoria, lo que necesito es una ecuación $r(\varphi)$:

$\hookrightarrow$ de (4), despejo $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2}\right)} \longleftrightarrow \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2}\right)} \quad (*)$$

$\hookrightarrow$ Sabiendo que, por (3), $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}$ puedo escribir:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

$\hookrightarrow$ Entonces reemplazando en (*):

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dt}{d\varphi}\left(\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}\right)$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{mr^2}{L}\left(\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}\right)$$

↳ Finalmente se obtiene:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - \frac{\bar{L}^2}{2mr^2}}}$$

↳ Para los límites de integración lo que hago, es elegir $r_0$ como el punto de mínimo acercamiento, $\varphi_0 = 0$ y considerar que el radio crece con el ángulo, por lo que tomo el positivo.

↳ Buscar $r_0$:

$$E = \frac{\bar{L}^2}{2mr^2} \longleftrightarrow r_0 = \pm\sqrt{\frac{\bar{L}^2}{2mE}}$$

→ por razones físicas obvias, se elije +

↳ Entonces:

$$\varphi = \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - \frac{\bar{L}^2}{2mr^2}}}$$

hago el cambio de variable $u = \frac{1}{r} \leftrightarrow du = -\frac{1}{r^2}dr$:

$$\varphi = -\sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{u_0} \frac{du}{\sqrt{E - \frac{\bar{L}^2}{2m}u^2}}$$

y ahora uso la integral que me dan de ayuda:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a - bu^2}} = -\frac{1}{\sqrt{b}} \arccos\left(\frac{bu}{\sqrt{ab}}\right)$$

con $a = E$ y $b = \frac{\bar{L}^2}{2m}$

$$\varphi = \sqrt{\frac{L^2}{\cancel{2m}}} \underbrace{\sqrt{\frac{\cancel{2m}}{L^2}}}_{\cancel{L^2 \alpha^2}} \cdot \arccos\left(\underbrace{\sqrt{\frac{\bar{L}^2}{2mE}}}_{r_0} \cdot u\right)\Bigg|_{u_0}^{u}$$

↳ vuelvo a la variable r:

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} \cdot \arccos\left(r_0 \frac{1}{r}\right)\Big|_{r_0}^{r} = \frac{1}{\alpha}\left(\arccos\left(\frac{r_0}{r}\right) - \underbrace{\arccos\left(\frac{r_0}{r_0}\right)}_{0}\right)$$

$$\varphi = \alpha \cdot \arccos\left(\frac{r_0}{r_0}\right) \leftrightarrow \cos(\alpha\varphi) = \frac{r_0}{r}$$

$$(6) \quad \boxed{r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos(\alpha\varphi)}} \longrightarrow \text{Trayectoria para potencial repolsivo y } E>0$$

→ Para graficarla, voy a analizar que pasa en ciertos valores de $\cos(\alpha\varphi)$

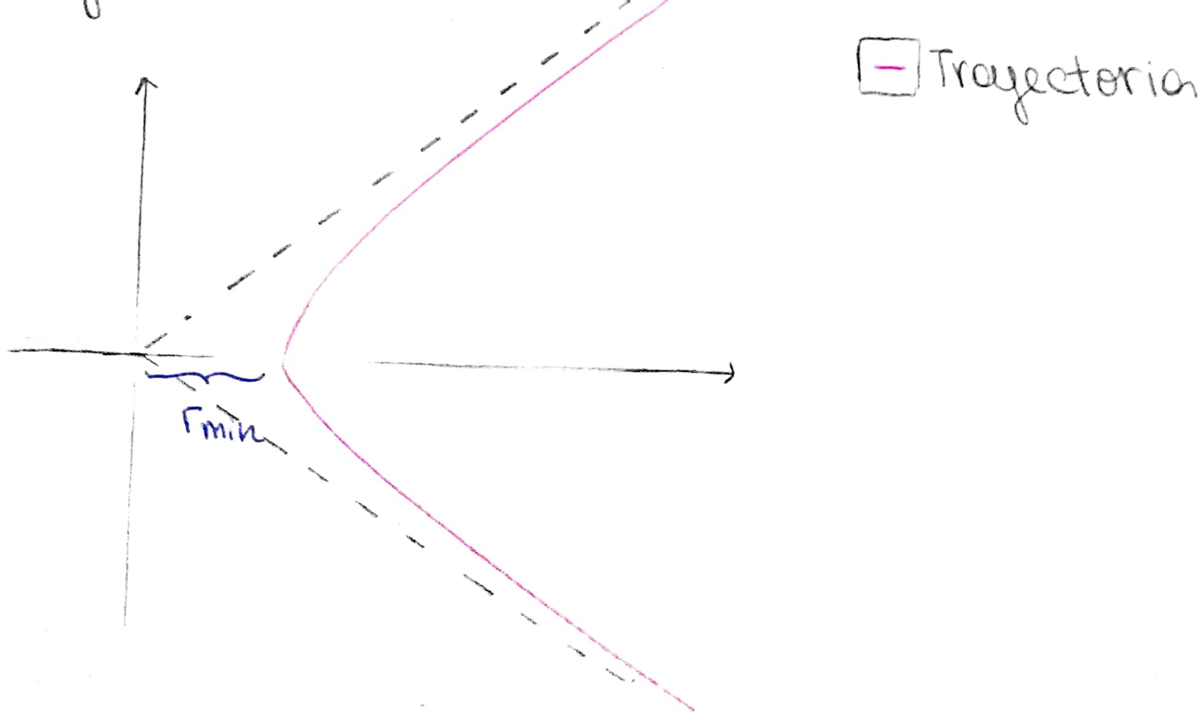
- Si $\cos(\alpha\varphi) = 1 \Rightarrow r(\varphi) = r_0 \leftrightarrow \alpha\varphi = 0 \leftrightarrow \varphi = 0$

- Si $\underbrace{\alpha\varphi \to \pm\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow \cos(\alpha\varphi) \to 0 \Rightarrow r \to \pm\infty$

$$\underbrace{\varphi \to \pm\frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{van a existir dos asintotas en el plano polar sobre estos dos angulos.}$$

$$\left|\pm\frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$$

→ La trayectoria sería entonces:

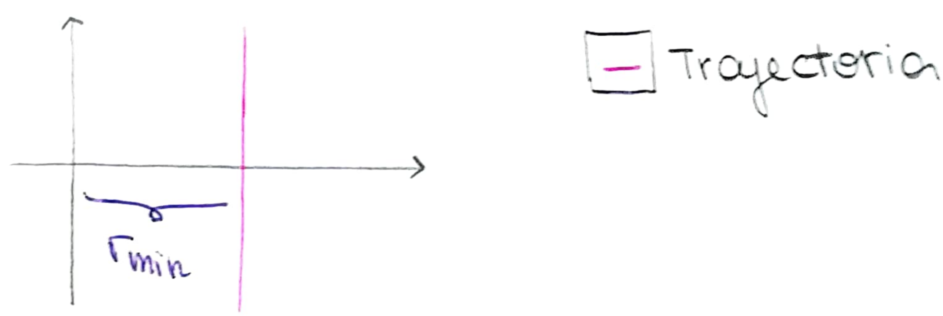



HOJA 3

→ Ahora me piden analizar $K \to 0$. En este límite el potencial se vuelve cada vez mas chico y tiene menos efecto sobre $m$. Cuando $K=0$, $m$ es una partícula totalmente "libre" (no siente ninguna fuerza) y por lo tanto su movimiento será rectilíneo uniforme (1era Ley de Newton).

→ Si analizo el límite en la trayectoria, veo que $\alpha \to 1$ y esto implica que los asíntotos pasen a ser $\pm\frac{\pi}{2}$ y si lo escribo de esta forma:

$$r_0 = r\cos(\varphi) \longrightarrow \text{es la ecuación de una recta!}$$




(b) Potencial atractivo $(L^2 < -2mK)$, $E<0$.

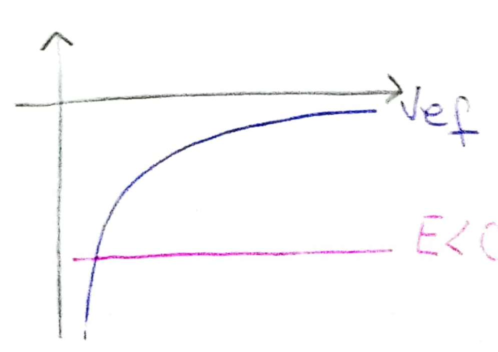
→ siendo el potencial efectivo

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{L^2}{2m} - |K|\right)$$ → Si uso la condición del problema

$$L^2 < -2mK \longleftrightarrow \frac{L^2}{2m} < -K$$

$$\frac{L^2}{2m} < |K|$$

⇒ obtengo que el potencial es negativo $\forall r$ y estoy en este caso:



→ Entonces, repitiendo algunos pasos del punto (a), llego a siguiente integral

$$\varphi = \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{E - bu^2}} \quad \text{con} \quad b = \frac{L^2}{2m} - |k| < 0$$

$$u_0 = \frac{1}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{-b/E}_{>0}}}$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{E}}}_{i\sqrt{E}} \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{b}{E}u^2}}$$

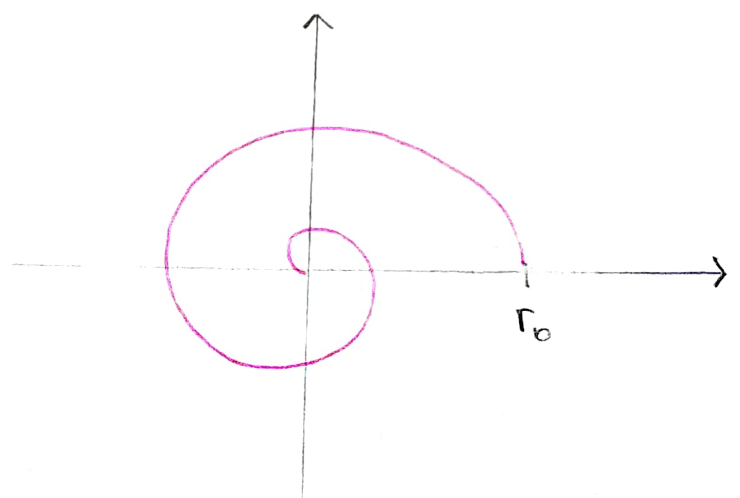
$$\varphi = \sqrt{\frac{L^2}{2mE}} \cdot \frac{1}{i} \cdot \sqrt{\frac{E}{b}} \arccos\left(\sqrt{\frac{b}{E}} \frac{1}{r}\right)$$

$$\sqrt{\frac{2mE}{L^2}} \sqrt{\frac{b}{E}}\, i \cdot \varphi = \arccos\left(\sqrt{\frac{b}{E}}\, r\right)$$

$$\cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{L^2}} \underbrace{\sqrt{\frac{b}{E}}}_{r_0} i\varphi\right) = \overbrace{\sqrt{\frac{b}{E}}}^{r_0} \frac{1}{r}$$

(7) $$\boxed{r(\varphi) = \frac{r_0}{\cosh\left(r_0 \sqrt{\frac{2mE}{L^2}}\, \varphi\right)}}$$ → Trayectoria para potencial atractivo y $E<0$

→ En este caso, la trayectoria es algo así :




HOJA 4

→ Ahora, me piden también, calcular el tiempo que tardó la partícula en llegar al origen si parte desde un punto de retorno ($r_0$ en este caso).

↳ A partir de la energía:

$$\left\{ E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{b}{r^2} \right\} \quad , \quad b = \frac{L^2}{2m} - |K| < 0$$

↳ despejo $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{b}{r^2}\right)}$$ → elijo el − por $r$ decrece con $t$

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - \frac{b}{r^2}}$$

$$\int_0^{t_{origen}} dt = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{b}{r^2}}}$$ con $r_0 = \sqrt{\frac{b}{E}}$

↳ hago el cambio de variable $u = r^2 \leftrightarrow du = 2r\,dr$

$$t_{origen} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{u_0}^{0} \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{E - \frac{b}{u}}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{u_0}^{0} \frac{du}{\sqrt{Eu - b}}$$ $u_0 = \frac{b}{E}$

$$t_{origen} = -\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{m}{2}}\, \cancel{2}\frac{\sqrt{Eu - b}}{E}\Bigg|_{u_0}^{0}$$

$$t_{origen} = -\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\frac{\sqrt{-b}}{E} - \cancel{\frac{\sqrt{E\cdot\frac{b}{E} - b}}{E}}\right)$$

tiempo que $m$ tarda en llegar al origen desde $r_0$ ←

$$\boxed{t_{origen} = -\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\sqrt{-b}}{E}}$$

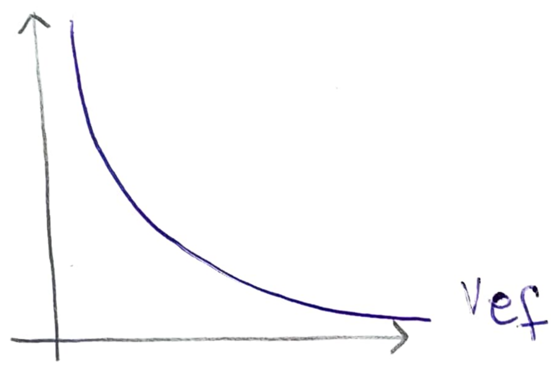
→ notar que como $E < 0$ $\Rightarrow t_{origen} > 0$ ✓

(C) ¿Qué ocurre cuando $\underbrace{L^2 < -2mK > 0}_{(*)}$?

→ En este caso, el potencial efectivo:

$$V_{ef} = \frac{\overline{L}^2}{2mr^2} \quad \text{con } \overline{L}^2 = L^2\alpha^2 \; , \; \alpha^2 = \underbrace{\left(1 - \frac{2km}{L^2}\right)}_{>0 \text{ por } (*)}$$

y termina siendo como en el primer caso pero con un potencial atractivo:




. Si $E<0 \Rightarrow$ la partícula no va a cambiar de dirección debido al potencial

. Si $E>0 \Rightarrow$ vale la trayectoria encontrada en (a) con $r_{min}$ en $r_0$ y con asíntotas en $\pm\frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{2}$ pero en este caso, en ángulos mayores en módulo a $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, va a tener la siguiente forma: