

Ejercicio de Parcial

FUERZAS CENTRALES

Enunciado

Problema 2. Considere una partícula de masa m que se mueve bajo la acción del potencial

$$V(r) = -\frac{k}{r} - \frac{c}{r^3} \quad (k, c > 0).$$

Suponga que el segundo término es una perturbación al potencial Kepleriano. Por simplicidad, defina la cantidad $\alpha \equiv l^2/2m$, siendo l el momento angular de la partícula.

- Estudie el problema unidimensional equivalente, grafique el potencial efectivo y discuta cualitativamente las trayectorias posibles.
- ¿En qué casos es posible la existencia de órbitas no acotadas? Justifique su respuesta.
- ¿Bajo qué condiciones existen órbitas circulares? Analice su estabilidad. Determine el radio r_c de la órbita circular estable en función de los datos del problema.
- Halle la frecuencia de oscilación radial para pequeños apartamientos del radio r_c asumiendo que $\alpha^2 = 4ck$. Analice si la órbita resultante será abierta o cerrada.

Resolución

El primer inciso nos pide estudiar el problema unidimensional equivalente. Dado que nos encontramos en un problema de fuerzas centrales, sabemos que el movimiento se da en un plano (¿qué conservación nos permite llegar a esta conclusión?). Por lo tanto, eligiendo un sistema de referencia donde el eje z es normal al plano de movimiento, podemos escribir al lagrangiano del sistema en función de dos coordenadas generalizadas $\{r, \theta\}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r) \quad (1)$$

y dado que θ es cíclica, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \longrightarrow mr^2\dot{\theta} = cte \equiv l \quad (2)$$

A partir de esta conservación (que ya la conocíamos de antemano), y la conservación de la energía (¿cómo podemos llegar a esta conclusión? ¿qué pasa con la función h ?), podemos rees-

cribir a la frecuencia angular en función del radio y unidimensionalizar al problema definiendo un potencial efectivo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\left[\frac{\alpha}{r^2} - \frac{k}{r} - \frac{c}{r^3} \right]}_{V_{eff}} \quad (3)$$

definiendo $\alpha = \frac{l^2}{2m}$ como lo indica la consigna.

Lo primero que hacemos es entender el comportamiento límite del potencial:

$$\begin{cases} V_{eff}(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty \\ V_{eff}(r \rightarrow +\infty) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (4)$$

Es importante notar que V_{eff} tiende a cero tomando valores negativos. Esto sucede dado que, siempre que $k > 0$ (como en este ejercicio), siempre existe un r_0 a partir del cual $\frac{k}{r} > \frac{\alpha}{r^2}$. Buscamos entonces los puntos críticos. Derivando el potencial efectivo, llegamos a que los radios críticos deben satisfacer

$$\left. \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \rightarrow r_{\pm} = \frac{\alpha}{k} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3ck}{\alpha^2}} \right) \quad (5)$$

A partir de acá, vemos que existen tres casos posibles:

$$(I) \frac{3ck}{\alpha^2} < 1$$

En este caso, tenemos dos puntos críticos. Dada la tendencia límite del potencial (ec. 4), la única forma de que existan estos puntos es que r_- se corresponda con un máximo y r_+ con un mínimo de potencial. Sucede que $V_{eff}(r_+) < 0$ puesto que tiende V_{eff} a cero tomando valores negativos. Por otro lado, no es posible definir a priori el signo del máximo del potencial. Si evaluamos el valor de r_- en V_{eff} y pedimos que sea positivo, se llega a la siguiente desigualdad, que solo se satisface si $\alpha^2 > 4ck$

$$\frac{2ck}{\alpha^2} - 1 + \sqrt{1 - \frac{3ck}{\alpha^2}} > 0 \quad (6)$$

Por ende, un gráfico cualitativo del potencial para el caso en que $\alpha^2 > 4ck$ debe verse así

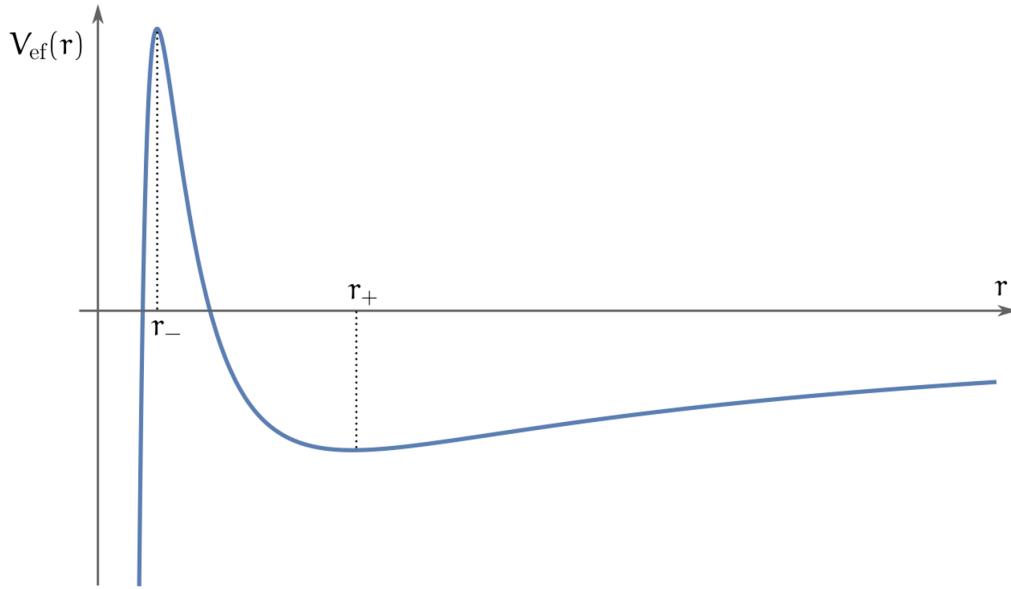


Figura 1: Gráfico cualitativo del potencial efectivo para el caso $\frac{3ck}{\alpha^2} < 1$.

En caso de que $\alpha^2 \leq 4ck$, la *forma* del potencial es la misma pero el máximo pasa a ser local en vez de global, tal que $V_{eff}(r_-) < 0$.

Los tipos de órbitas posibles son:

1. Dadas las condiciones iniciales $r(t = t_0) > r_-$, si la energía del sistema se encuentra entre $V_{eff}(r_+) \leq E < 0$ entonces el movimiento estará acotado. En este caso, la partícula se moverá entre un radio mínimo y un radio máximo (puntos de retorno en los que $E = V_{eff}(r_{retorno})$). Además, sucede que r_+ se corresponde con el radio de una órbita circular, dado que en dicho punto V_{eff} toma un valor mínimo (**órbita circular estable**).
2. Si la energía del sistema es $E > \max(V_{eff})$, la partícula tiene suficiente energía como para *recorrer* todo el potencial efectivo.
3. Sucede que si $r(t = t_0) > r_-$ y $V_{eff}(r_-) > 0$ (es decir, es un máximo global), pero $0 \leq E < V_{eff}(r_-)$ entonces la partícula puede provenir desde el infinito, alcanzar un radio de máximo acercamiento, y regresar al infinito. Por lo tanto, el movimiento no está acotado.
4. Sosteniendo que $V_{eff}(r_-)$ es un máximo global y $E < V_{eff}(r_-)$, pero ahora $r(t = t_0) < r_-$, la partícula entonces queda atrapada y siempre caerá hacia el centro de fuerzas. Si tratara de escapar, alcanzaría un punto de retorno y caería de todas formas. Particularmente, el caso en el que $E = V_{eff}(r_-)$ se corresponde también con un movimiento acotado, dado que r_- es el radio de una **órbita circular inestable** (por ser máximo, global o local, del potencial efectivo).

(II) $\frac{3ck}{\alpha^2} = 1$

En este caso, pasamos a tener un único punto crítico en $r = \frac{\alpha}{k}$, que no es ni máximo ni mínimo sino un punto de inflexión (pueden chequear que $\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2}|_{r=\alpha/k} = 0$). Este caso límite representa una bifurcación en el tipo de órbitas posibles dado que para $1 < \frac{3ck}{\alpha^2}$ no existen puntos críticos.

(III) $\frac{3ck}{\alpha^2} > 1$

Como no existen puntos críticos el potencial crece monótonamente desde $-\infty$ y tiende asintóticamente a cero.

El gráfico cualitativo del potencial en este caso es

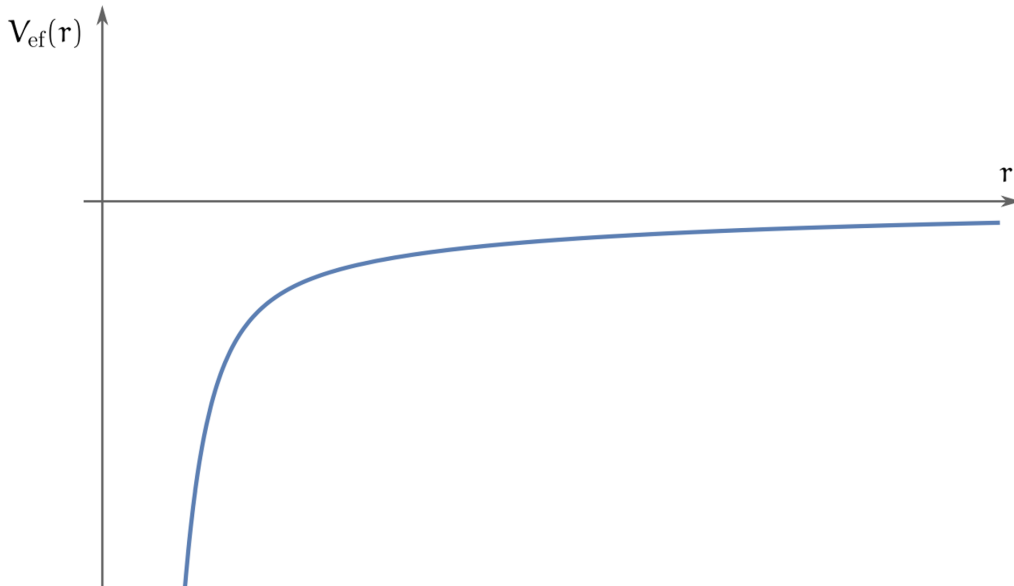


Figura 2: Gráfico cualitativo del potencial efectivo para el caso $1 < \frac{3ck}{\alpha^2}$.

En este caso, siempre que $E \geq 0$ la partícula podrá escapar del centro de fuerzas. Mientras que, si $E < 0$, la partícula caerá al centro.

Alternativamente, existe una manera de intuir la forma cualitativa del potencial efectivo (si bien es **necesario** acompañar esta visión en un parcial con las cuentas y argumentos que lo justifiquen). Vemos que el último término del potencial efectivo (el que tiene al parámetro c) es una perturbación del potencial Kepleriano. Esto quiere decir que para $c = 0$, recuperamos el potencial efectivo de Kepler. A medida que lo vamos *prendiendo* (c toma valores no nulos cercanos a cero) esperamos que el potencial resultante conserve cierta similitud con el potencial original. Dado que la perturbación posee un término cúbico radial ($\sim 1/r^3$), siempre sucederá que $V_{eff}(r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$; por lo tanto, uno esperaría que los efectos de dicha perturbación se observen sólo para radios chicos. Entonces, es de esperar la existencia de un máximo para un $r < r_c$ (donde r_c es el radio de la órbita circular de Kepler), y un mínimo cercano a r_c . Para valores de c superiores a algún umbral C_c , es razonable esperar un comportamiento monótono del potencial (dado que los términos negativos $\sim 1/r$ y $\sim 1/r^3$ le *ganarán* en todo el dominio al término positivo $\sim 1/r^2$). Todo esto se deja reflejado en la siguiente figura.

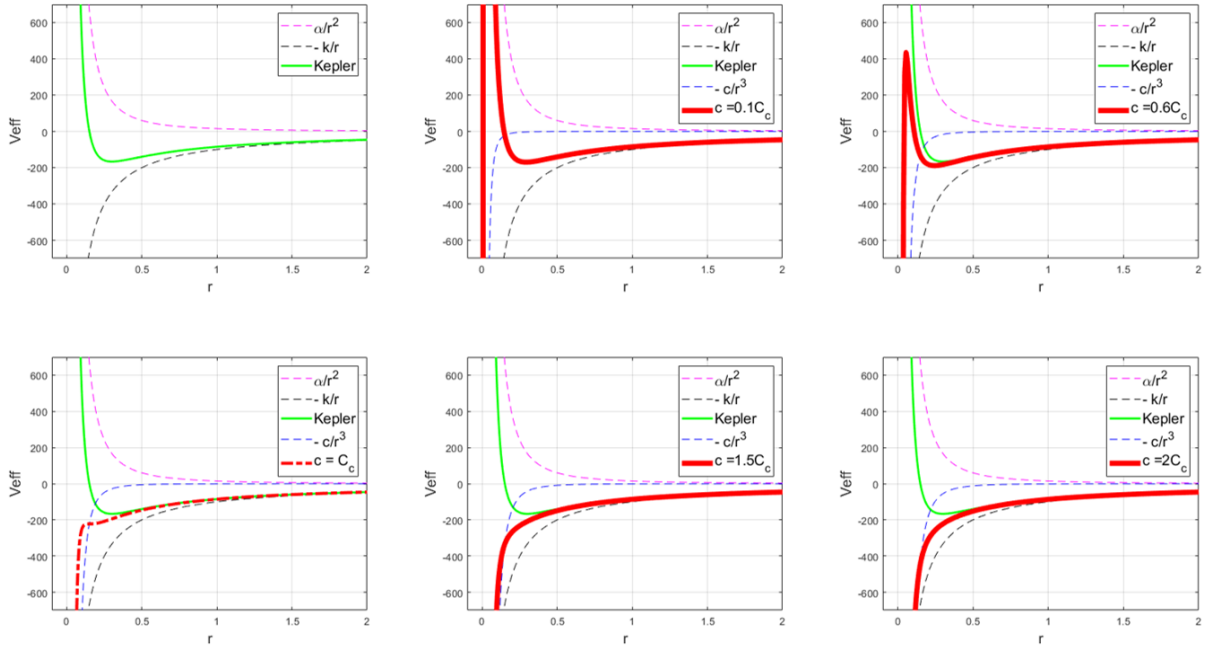


Figura 3: Potencial efectivo para distintos valores de c en función del valor umbral C_c a partir del cual el V_{eff} pasa a ser monótono.

Habiendo hecho éste análisis, lo único que nos queda determinar es la frecuencia de oscilación radial para pequeños apartamientos de la órbita circular estable, asumiendo que $\alpha^2 = 4ck$. Sucede que, en torno al radio r_+ calculado anteriormente, podemos desarrollar el potencial hasta segundo orden y obtener el siguiente lagrangiano unidimensional

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \left(V_{eff}(r_+) + \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \Big|_{r_+} (r - r_+) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2} \Big|_{r_+} (r - r_+)^2 \right) \quad (7)$$

El resultado es el lagrangiano de un oscilador armónico con frecuencia de oscilación $w_r^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2} \Big|_{r_+}$. Les dejo como ejercicio calcular esta frecuencia de oscilación, compararla con la frecuencia angular $\dot{\theta}$, y verificar si las órbitas son cerradas o abiertas (*Hint*: para que una órbita sea cerrada, el cociente $\frac{\dot{\theta}}{\omega_r}$ debe ser racional). Pueden chequear con los resultados oficiales:

1. Para calcular ω_r pueden derivar dos veces el potencial y hacer uso de la ecuación de extremo

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \Big|_{r_+} = 0 \longleftrightarrow kr_+^2 - 2\alpha r_+ + 3c = 0 \quad (8)$$

Pueden llegar a

$$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2} \Big|_{r_+} = \frac{2}{r_+^5} (\alpha r_+ - 3c) \quad (9)$$

2. Usando que $\alpha^2 = 4ck$ se llega a que

$$w_r^2 = \frac{6c}{mr_+^5} \quad (10)$$

3. Por último, se llega a que las órbitas son abiertas pues $\frac{\dot{\theta}}{\omega_r} = \sqrt{2}$