

## Guía 4 - Pequeñas Oscilaciones

### Repaso Teórico

Una vez planteado el Lagrangiano buscamos las posiciones de equilibrio como los mínimos del potencial

$$\mathcal{L} = T(q, \dot{q}) - V(q) = \sum_{i,j=1}^n \frac{t_{ij}(q)}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q), \quad \left. \frac{\partial V(q)}{\partial q_k} \right|_{q^{(eq)}} = 0 \quad (1)$$

Luego estudiamos el problema de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio,  $\eta_i = q_i - q_i^{(eq)}$ , aproximando el Lagrangiano a segundo orden en  $\eta_i \ll 1$

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2} \sum_{i,j} t_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j - \cancel{V_{eq}} \equiv \frac{1}{2} \dot{\eta}^t \mathbb{T} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^t \mathbb{V} \eta - \cancel{V_{eq}} \quad (2)$$

donde pasamos a notación matricial para simplificar el álgebra. Como  $V_{eq}$  es una constante que no modifica la dinámica, la ignoraremos. Los coeficientes de las matrices vienen dados por

$$t_{ij} = t_{ij}(q^{(eq)}), \quad V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q^{(eq)}}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Las ecuaciones de E-L nos dicen que

$$\sum_j t_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = (\mathbb{T} \ddot{\eta} + \mathbb{V} \eta)_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{T} \ddot{\eta} + \mathbb{V} \eta = 0 \quad (4)$$

Proponemos como solución un oscilador armónico

$$\eta_j = a_j e^{i\omega t} \quad \longrightarrow \quad \eta = \mathbb{A} e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \det(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) = 0 & \rightarrow \text{Autovalores } \omega_k \\ (\mathbb{V} - \omega_k^2 \mathbb{T}) \mathbb{A}^{(k)} = 0 & \rightarrow \text{Autovectores } \mathbb{A}^{(k)} \\ \mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{1} & \rightarrow \text{Ortonormalidad} \end{cases} \quad (5)$$

De aquí salen  $n$  valores para  $\omega$ . Cada uno corresponde a un modo normal, que identificamos con el subíndice  $k$ . La matriz cuadrada  $\mathbb{A}$  tiene los autovectores  $\mathbb{A}^{(k)}$  en sus columnas, es decir  $\mathbb{A} = (\mathbb{A}^{(1)} \mathbb{A}^{(2)} \dots \mathbb{A}^{(n)})$ . Finalmente, la solución general será una combinación de modos normales

$$\eta_j = \sum_k C_k a_j^{(k)} e^{i\omega_k t} \quad \longrightarrow \quad \eta(t) = \text{Re} \left[ \sum_k C_k \mathbb{A}^{(k)} e^{i\omega_k t} \right] = \sum_k C_k \mathbb{A}^{(k)} \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (6)$$

donde  $\mathcal{C}_k = C_k e^{i\phi_k}$  es un número complejo que contiene la información de la amplitud  $C_k$  y fase  $\phi_k$  de cada modo normal. En general para imponer las condiciones iniciales suele ser más fácil usar la siguiente expresión

$$\eta(t) = \sum_k \mathbb{A}^{(k)} [B_k \cos(\omega_k t) + D_k \sin(\omega_k t)] \quad (7)$$

Coordenadas Normales: Como los autovectores son ortogonales a través de la métrica, entonces  $\mathbb{A}$  diagonaliza a  $\mathbb{T}$  y  $\mathbb{V}$ :  $\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \text{diag}(t_1, \dots, t_n)$  y  $\mathbb{A}^T \mathbb{V} \mathbb{A} = \text{diag}(V_1, \dots, V_n)$ . Esto nos permite elegir *coordenadas normales*  $\eta = \mathbb{A} \xi$  que diagonalizan a  $\mathbb{T}$  y  $\mathbb{V}$ , reduciendo el problema un montón

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{\xi}^T (\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A}) \dot{\xi} - \frac{1}{2} \xi^T (\mathbb{A}^T \mathbb{V} \mathbb{A}) \xi = \sum_k \frac{t_k}{2} \dot{\xi}_k^2 - \frac{V_k}{2} \xi_k^2 \\ &\Rightarrow \xi_k = C_k e^{i\omega_k t}, \quad \text{con } \omega_k^2 = \frac{V_k}{t_k} \end{aligned} \quad (8)$$

Es decir que, a menos de una constante multiplicativa,  $\xi = \mathbb{A}^T \mathbb{T} \eta$ .

En particular podríamos elegir los coeficientes de  $\mathbb{A}$  de forma de normalizar la diagonalización de  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{1}$ . En ese caso  $t_k = 1$  y  $\omega_k^2 = V_k$  y las llamamos *coordenadas normales normalizadas*.

## Ejercicio 7

Hay tres masas enhebradas en un anillo de radio  $R$  unidas por resortes. Como hay radios fijos y ángulos, conviene usar coordenadas polares. Sigamos la figura 1;  $\vec{r}_i = R\theta_i \hat{r}_i$ .

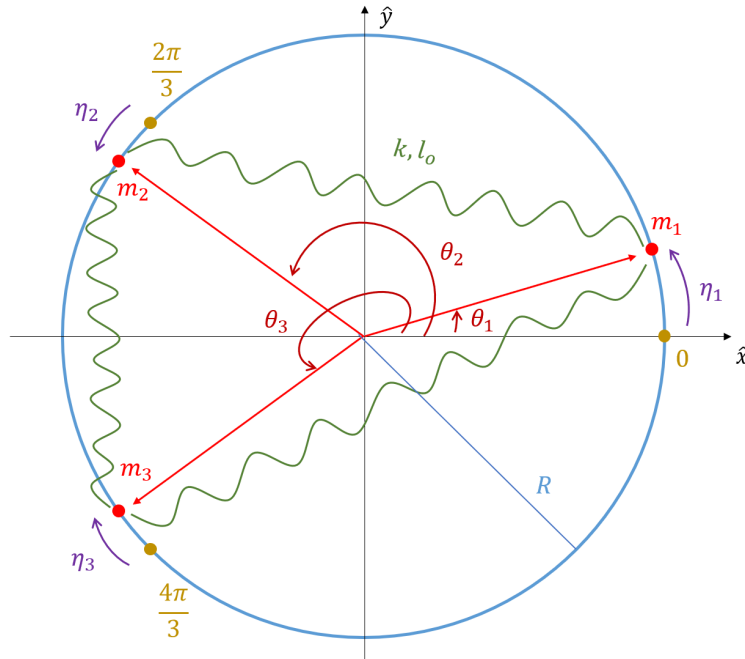


Figura 1: Coordenadas polares para el ejercicio 7.

### 1. LAGRANGIANO Y EQUILIBRIO

La cinética en este caso es muy simple, porque los radios son fijos

$$T(q) = \sum_i \frac{m_i}{2} R^2 \dot{\theta}_i^2 \quad (9)$$

El complicado es el potencial, porque depende de la distancia entre las masas. Es decir

$$\begin{aligned} V(q) &= \frac{k}{2} (|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - \ell_0)^2 + \frac{k}{2} (|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| - \ell_0)^2 + \frac{k}{2} (|\vec{r}_3 - \vec{r}_2| - \ell_0)^2 \\ &= \sum_{j>i} V^{(ij)} = \sum_{j>i} \frac{k}{2} (|\vec{r}_j - \vec{r}_i| - \ell_0)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

donde el módulo de la distancia es complicado porque el movimiento es bidimensional, como en el ejercicio 3. Descomponiendo versores

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} = R\sqrt{(\cos \theta_j - \cos \theta_i)^2 + (\sin \theta_j - \sin \theta_i)^2} \quad (11)$$

Uno podría continuar usando esta expresión, pero veamos que no es tan complicado como

parece. Si expandimos los paréntesis al cuadrado y usamos que  $1 = \cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i$  entonces

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = R\sqrt{2 - 2\cos\theta_i \cos\theta_j - 2\sin\theta_i \sin\theta_j} = 2R\sqrt{\frac{1 - \cos(\theta_j - \theta_i)}{2}} = 2R\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right)} \quad (12)$$

Nos queda el módulo del seno en el potencial

$$V(q) = \sum_{j>i} \frac{k}{2} \left[ 2R \left| \sin\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right) \right| - \ell_0 \right]^2 \quad (13)$$

Los módulos resultan bastante molestos, así que esta bueno chequear si son necesarios. Los argumentos son positivos porque  $\theta_3 > \theta_2 > \theta_1$  (sino se chocarían). El seno entonces será positivo si el argumento es menor a  $\pi$ ,  $\theta_j - \theta_i \leq 2\pi$ . Pero esto también se debe cumplir para que no se choquen. Por ejemplo si  $\theta_1 = 0$ , el ángulo máximo que pueden tener  $\theta_2$  y  $\theta_3$  es  $2\pi$ ; si aumentan un poco más el ángulo se chocan con  $m_1$ . Con lo que

$$V(q) = \frac{k}{2} \left\{ \left[ 2R \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - \ell_0 \right]^2 + \left[ 2R \sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_1}{2}\right) - \ell_0 \right]^2 + \left[ 2R \sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right) - \ell_0 \right]^2 \right\} \quad (14)$$

Ya tenemos el Lagrangiano. Para hallar el mínimo hay que derivar el potencial respecto de cada variable e igualarlo a cero

$$\text{Hay equilibrio si } \left. \frac{\partial V}{\partial \theta_i} \right|_{\theta^{eq}} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Sin embargo si hacemos eso lo que queda no es simple, hay una suma para cada variable. Por ejemplo respecto de  $i = 1$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \right|_{\theta^{eq}} &= k \left[ 2R \sin\left(\frac{\theta_2^{eq} - \theta_1^{eq}}{2}\right) - \ell_0 \right] 2R \cos\left(\frac{\theta_2^{eq} - \theta_1^{eq}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &+ k \left[ 2R \sin\left(\frac{\theta_3^{eq} - \theta_1^{eq}}{2}\right) - \ell_0 \right] 2R \cos\left(\frac{\theta_3^{eq} - \theta_1^{eq}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Se puede trabajar con estas igualdades... Otro método más simple es ver del dibujo que hay simetría debido a que todas las longitudes naturales son iguales. Es sensato pensar que, como queremos poner 3 partículas en un aro de  $2\pi$ , los  $\theta^{eq}$  están separados por  $2\pi/3$ . Entonces proponemos  $\theta_3^{eq} = 2\pi/3 + \theta_2^{eq} = 4\pi/3 + \theta_1^{eq}$ . Pueden chequear que esto funciona y minimiza el potencial (anula la derivada para cada  $i$ ). Por ejemplo si  $i = 1$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \right|_{\theta^{eq}} &= k \left[ \overbrace{2R \sin\left(\frac{2\pi/3}{2}\right)}^{=\sqrt{3}/2} - \ell_0 \right] \overbrace{2R \cos\left(\frac{2\pi/3}{2}\right)}{=1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &+ k \left[ \overbrace{2R \sin\left(\frac{4\pi/3}{2}\right)}^{=\sqrt{3}/2} - \ell_0 \right] \overbrace{2R \cos\left(\frac{4\pi/3}{2}\right)}{=-1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Vemos que hay cierta libertad respecto de las posiciones de equilibrio porque sólo nos quedan diferencias entre ellas. Podemos por ejemplo elegir la convención  $\theta_1^{eq} = 0$ . Finalmente tenemos entonces el Lagrangiano y las posiciones de equilibrio

$$\mathcal{L} \simeq \sum_i \frac{m_i}{2} R^2 \dot{\theta}_i^2 + \frac{k}{2} \left\{ \left[ 2R \sin \left( \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) - \ell_0 \right]^2 + \left[ 2R \sin \left( \frac{\theta_3 - \theta_1}{2} \right) - \ell_0 \right]^2 + \left[ 2R \sin \left( \frac{\theta_3 - \theta_2}{2} \right) - \ell_0 \right]^2 \right\} \quad (18)$$

$$\text{Equilibrio:} \quad \theta_1^{eq} = 0, \quad \theta_2^{eq} = \frac{2\pi}{3}, \quad \theta_3^{eq} = \frac{4\pi}{3} \quad (19)$$

Este sería el “paso 1”, correspondiente a la ecuación (1) (fíjense el tiempo que llevó).

## 2. MATRICES $\mathbb{T}$ Y $\mathbb{V}$

A partir de aquí ya podemos construirnos las matrices  $\mathbb{T}$  y  $\mathbb{V}$  usando las definiciones de la ecuación (3).  $\mathbb{T}$  es simple porque es diagonal en las masas. Para  $\mathbb{V}$  hay que derivar dos veces el potencial y evaluar en el equilibrio. Hacemos esto porque el potencial no está a segundo orden, y queremos aproximarlos.

Otra opción es ir expandiendo los senos y cosenos manualmente hasta llegar a un Lagrangiano de orden 2. Ojo acá con acostumbrarse a que el seno se expande solo como el argumento... eso vale solo si se expande alrededor de  $\theta^{(eq)} = 0$ . Pero general depende del valor de  $\theta^{(eq)}$ . Por ejemplo en nuestro caso

$$\begin{aligned} \sin \left( \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) &\simeq \sin \left( \frac{\theta_2^{(eq)} - \theta_1^{(eq)}}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{\theta_2^{(eq)} - \theta_1^{(eq)}}{2} \right) \left[ (\theta_2 - \theta_2^{(eq)}) - (\theta_1 - \theta_1^{(eq)}) \right] \\ &= \sin \left( \frac{2\pi/3}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi/3}{2} \right) \left( \theta_2 - \theta_1 - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

De hecho, hay más: resulta que esta aproximación del seno a primer orden no alcanza. Hay que ir a orden dos porque aparece un término cruzado. Muestro lo que quiero decir con un ejemplo: si  $\alpha$  es una constante y  $\epsilon \sim 0$

$$\begin{aligned} [R \sin(\alpha + \epsilon) - \ell_0]^2 &\simeq \left[ R \sin \alpha - \ell_0 + R \cos \alpha \epsilon - R \sin \alpha \frac{\epsilon^2}{2} \right]^2 \\ &\simeq (R \sin \alpha - \ell_0)^2 + 2(R \sin \alpha - \ell_0) R \cos \alpha \epsilon + \overbrace{[R \cos^2 \alpha - R \sin \alpha (R \sin \alpha - \ell_0)]}^{\text{Este}} \epsilon^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Si hacen eso y definen  $\eta_i = R(\theta_i - \theta_i^{(eq)})$  pueden chequear que

$$V(\eta) \simeq \frac{\gamma}{2} [(\eta_2 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2], \quad \gamma = \frac{k}{2} \left( \frac{\sqrt{3}\ell_0}{2R} - 1 \right) \quad (22)$$

la cual es una expresión estéticamente agradable. La dejo para que puedan chequear la expresión con otros potenciales de resortes en aros (como el del ejercicio 9). Pero la verdad que hacer esto no es simple en este ejercicio. Creo que es igual de trabajoso: en ambos casos hay que calcular las derivadas del potencial a segundo orden.

Siguiendo cualquiera de los dos métodos se obtiene que las matrices  $\mathbb{T}$  y  $\mathbb{V}$  son

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V} = \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Siempre chequeen a esta altura que las matrices obtenidas sean *simétricas*. Noten que el radio no aparece: sale de factor común en ambas matrices y no aporta nada. Así que para ignorarlo definí los desplazamientos como longitudes de arco en vez de ángulos:  $\eta_i = R(\theta_i - \theta_i^{(eq)})$ .

**Observación:** Como vemos de (22),  $\gamma$  es como una constante elástica efectiva del resorte para pequeñas oscilaciones. Pero para que se asemeje a un resorte,  $\gamma$  debe ser positiva. En ese caso el equilibrio corresponde a un mínimo y es estable. Pero si  $\gamma < 0$  el equilibrio es un máximo y resulta inestable. Los apartamientos no serán pequeños sino exponenciales: crecerán hasta que las masas choquen.

### 3. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Antes de calcularlos es importante desarrollar cierta intuición física sobre lo que deberíamos esperar. ¿Qué modos esperan que aparezcan?

Debería aparecer un modo rígido asociado a la rotación: si todos los ángulos se modifican en la misma cantidad, el problema es el mismo. Los modos restantes corresponderán a algún tipo de movimiento simétrico y antisimétrico.

Tomemos  $m_1 = m_2 \equiv m$  y  $m_3 \equiv M$  para simplificar un poco. La ecuación (5) nos indica que las frecuencias son los autovalores de la matriz

$$\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T} = \begin{pmatrix} 2\gamma - \omega^2 m & -\gamma & -\gamma \\ -\gamma & 2\gamma - \omega^2 m & -\gamma \\ -\gamma & -\gamma & 2\gamma - \omega^2 M \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \quad (24)$$

Definamos  $\lambda = 2\gamma - \omega^2 m$ . Queremos  $\Delta = 0$ . Recordemos algunos trucos para simplificar la cuenta: el valor del determinante no cambia si a una fila se le suma otra, y si a una fila se la multiplica por una constante el determinante se multiplica por la misma constante. El objetivo es llevar la matriz a una forma más triangular o con la mayor cantidad de ceros posibles. Así, si a la tercer fila le restamos la segunda tenemos

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda & -\gamma & -\gamma \\ -\gamma & \lambda & -\gamma \\ 0 & -\gamma - \lambda & 2\gamma - \omega^2 M + \gamma \end{pmatrix} \quad (25)$$

Ahora multiplicamos por  $\lambda/\gamma$  la segunda y le sumamos la primera

$$\frac{\lambda}{\gamma}\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda & -\gamma & -\gamma \\ 0 & \frac{\lambda^2}{\gamma} - \gamma & -\lambda - \gamma \\ 0 & -\gamma - \lambda & 2\gamma - \omega^2 M + \gamma \end{pmatrix} \quad (26)$$

Nos queda por calcular un simple determinante de 2x2

$$\Delta = \frac{\gamma}{\lambda} \mathcal{X} \left[ \left( \frac{\lambda^2}{\gamma} - \gamma \right) (2\gamma - \omega^2 M + \gamma) - (\lambda + \gamma)^2 \right] \quad (27)$$

Las cuentas no se ponen más divertidas. Les dejo a ustedes chequear que los autovalores y autovectores son

$$\begin{array}{c} \omega_1^2 = 0 \\ \mathbb{A}^{(1)} = a^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \omega_2^2 = \frac{3\gamma}{m} \\ \mathbb{A}^{(2)} = a^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \omega_3^2 = \frac{(2m + M)\gamma}{mM} \\ \mathbb{A}^{(3)} = a^{(3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2m}{M} \end{pmatrix} \end{array} \quad (28)$$

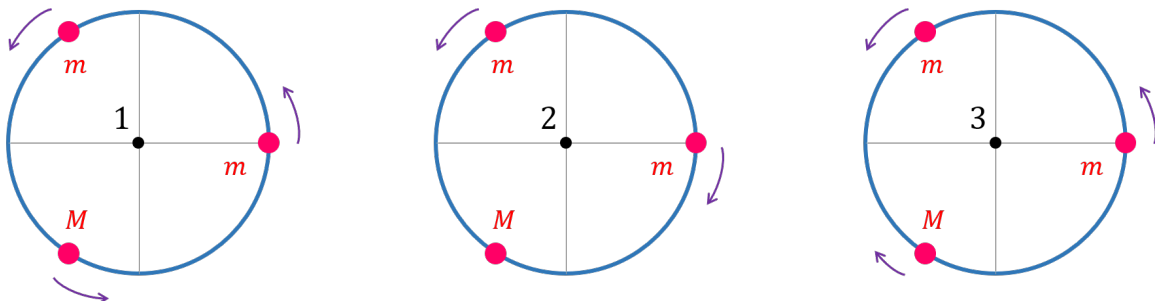
Ejemplifiqué bastante la cuenta porque tienen que saber hacer el procedimiento manualmente. Pero noten lo rápido que puede hacerse en una línea de código (de Mathematica), que pueden usar para verificar sus resultados

```

In[1]:= T =  $\begin{pmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m1 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{pmatrix}$ ; v =  $\gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ; eta =  $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ ;
{vals, vecs} = Eigensystem[{V, T}]
Out[2]:=  $\left\{ \left\{ 0, \frac{3\gamma}{m1}, \frac{(2m1+m3)\gamma}{m1m3} \right\}, \left\{ \{1, 1, 1\}, \{-1, 1, 0\}, \left\{ -\frac{m3}{2m1}, -\frac{m3}{2m1}, 1 \right\} \right\} \right\}$ 

```

Aquí hay que ponerse a reflexionar si lo obtenido coincide con lo esperado. Vemos que en el modo 1 apareció la frecuencia nula asociada a la simetría de rotación rígida del problema. El modo 2 es simétrico, de contrafase entre  $m_1$  y  $m_2$  con  $m_3$  fijo. El modo 3 es antisimétrico,  $m_3$  en contrafase de  $m_1$  y  $m_2$ . Los autovectores son iguales a los de la molécula del ejercicio 1.



De la ecuación (6) escribimos la solución final. Pero hay un detalle. La frecuencia 1 se anula... ¿eso significa que  $\eta_1 \sim e^{i\omega_1 t}$  es una constante? No, significa que esa solución propuesta no era correcta, porque no hay oscilación. El movimiento es en realidad el de una rotación rígida con

velocidad angular constante,  $\eta_1 = C_1 + C_1' t$ . Entonces

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1 + C_1' t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2m} \\ -\frac{1}{M} \end{pmatrix} C_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \quad (29)$$

#### 4. COORDENADAS NORMALES

No hace falta normalizarlas. Si ponemos  $a^{(k)} = 1$  entonces

$$\xi = \mathbb{A}^T \mathbb{T} \eta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{2m}{M} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(\eta_1 + \eta_2) + M\eta_3 \\ m(\eta_1 - \eta_2) \\ m(\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3) \end{pmatrix} \quad (30)$$

Es decir, cada coordenada normal se corresponde con un único modo normal (en vez de ser una combinación de ellos)

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2m + M)(C_1 + C_1' t) \\ 2m C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \frac{2m}{M}(2m + M) C_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \end{pmatrix} \quad (31)$$

EXTRA: ¿Qué sucede si  $m_1 = m_2 = m_3$ ?

Fijense de (28) que en ese caso  $\omega_2 = \omega_3 = 3\gamma/m$ . Es decir que el subespacio está degenerado: dos autovectores distintos corresponden al mismo autovalor. Si me dicen que el sistema tiene esa frecuencia, no podría distinguir en que modo está. En particular noten que para el tercer autovector puedo elegir una combinación lineal

$$\bar{\mathbb{A}}^{(3)} = \frac{1}{2} \mathbb{A}^{(2)} + \frac{1}{2} \mathbb{A}^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Es decir, debido a la simetría del problema cualquiera de la masas podría ser la que esté quieta mientras las otras dos oscilan en contrafase. Como las masas son iguales no puedo distinguir a priori cual está quieta; todas las opciones tienen la misma frecuencia y energía.