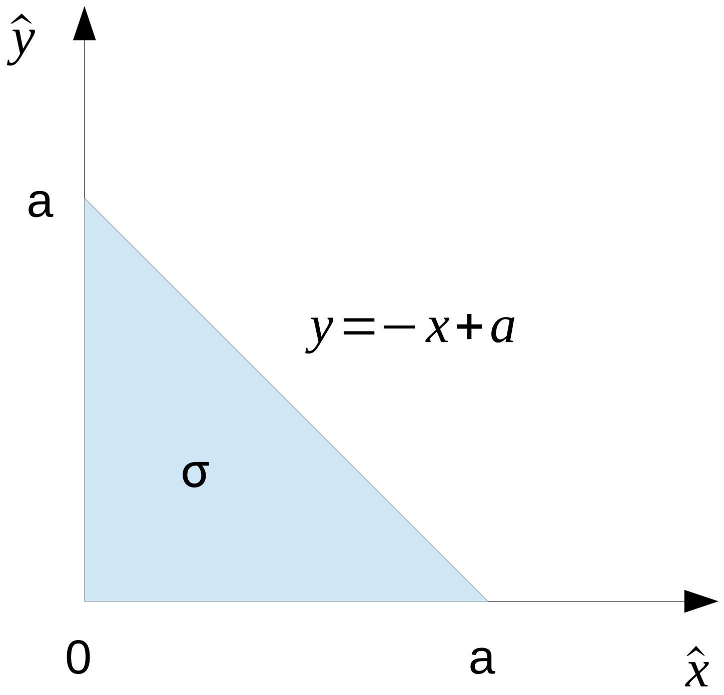
2. Calcular el tensor de inercia respecto del centro de masa para un cuerpo plano en forma de triángulo recto, de catetos iguales de longitud a. La densidad de masa por unidad de superficie es σ. Hallar los ejes principales de inercia y expresar el tensor de inercia en dichos ejes.

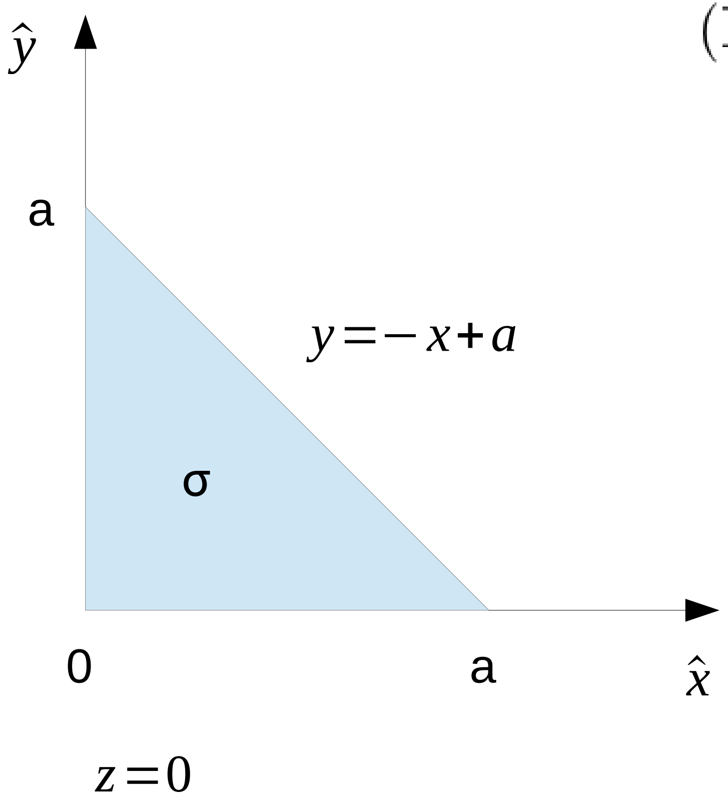


1) Calculo el tensor de inercia respecto al vértice: (0,0,0).

2) Uso el Teorema de Steiner para obtener el tensor de inercia respecto del centro de masa: (a/3, a/3, 0).

3) Diagonalizo el tensor de inercia para obtener los ejes principales de inercia (autovectores) y el tensor de inercia en dichos ejes (autovalores en la diagonal).

1) Calculo el tensor de inercia respecto al vértice: (0,0,0).



$$(\mathbf{I})_{ij} \equiv I_{ij} = \int \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right) \delta m \quad , \delta m = \sigma\, dx\, dy$$

$$I_{xx} = \sigma \int_0^a \int_0^{-x+a} y^2\, dx\, dy = \frac{\sigma}{3} \int_0^a (-x+a)^3\, dx = \sigma \frac{a^4}{12}$$

$$I_{yy} = \sigma \int_0^a \int_0^{-x+a} x^2\, dx\, dy = \sigma \int_0^a x^2 (-x+a)\, dx = \sigma \frac{a^4}{12}$$

$$I_{zz} = \sigma \int_0^a \int_0^{-x+a} x^2 + y^2\, dx\, dy = I_{yy} + I_{xx} = \sigma \frac{a^4}{6}$$

$$(\mathbf{I})_{ij} \equiv I_{ij} = \int \left(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right) \delta m$$

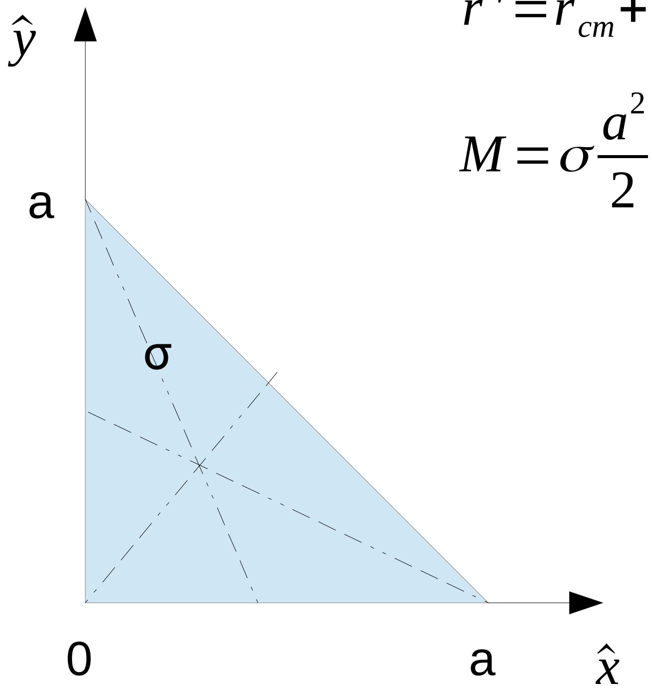
$$I_{xy} = -\sigma \int_0^a \int_0^{-x+a} xy\, dx\, dy = \frac{-\sigma}{2} \int_0^a x(-x+a)^2\, dx = -\sigma \frac{a^4}{24}$$

$$I_{xz} = 0$$

1) Calculo el tensor de inercia respecto al vértice: (0,0,0):

$$\mathrm{I} = \frac{\sigma a^4}{6} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Uso el Teorema de Steiner para obtener el tensor de inercia respecto del centro de masa: (a/3, a/3, 0).



$$\vec{r}\,' = \vec{r_{cm}} + \vec{d}$$

$$M = \sigma \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{r}\,' = (0,0,0) \quad \vec{r_{cm}} = (a/3, a/3, 0) \quad \vec{d} = (-a/3, -a/3, 0)$$

$$I_{ij} = J_{ij} + M[\delta_{ij} d^2 - d_i d_j]$$

$$d^2 = 2\frac{a^2}{3}$$

Notación: Con I el tensor que ya calculé antes, y J el tensor respecto al centro de masa

$$J_{xx} = I_{xx} - M[d^2 - d_x d_x] = \sigma \frac{a^4}{36} = J_{yy}$$

$$J_{zz} = I_{zz} - M d^2 = \sigma \frac{a^4}{18}$$

$$J_{xy} = I_{xy} - M[-d_x d_y] = -\sigma \frac{a^4}{72}$$

$$J_{xz} = J_{yz} = 0$$

2) Tensor de inercia respecto al centro de masa:

$$J=\frac{\sigma a^4}{18}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son los ejes principales de inercia? ¿Cómo queda el tensor de inercia en esos ejes?

3) Diagonalizo el tensor de inercia para obtener los ejes principales de inercia (autovectores) y el tensor de inercia en dichos ejes (autovalores en la diagonal).

$$det(J_{ij}-j)=0$$

$$det(J_{ij}-j)=\frac{\sigma a^4}{18}\left(j-\frac{3}{4}\right)\left(j-\frac{1}{4}\right)(j-1)$$

$$j=\frac{3}{4},\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad j=\frac{1}{4},\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad j=1,\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad J'=\frac{\sigma a^4}{18}\begin{pmatrix}3/4 & 0 & 0\\0 & 1/4 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$J'=A^t J A$ con A la matriz de autovectores normalizados como columnas

La transformación es una rotación en el plano xy de 45° hacia la derecha .

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(45°) & sen(45°) & 0 \\ -sen(45°) & \cos(45°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$