

## Guía 5b - Cuerpo Rígido

La energía cinética viene dada por

$$T = \frac{M}{2} \vec{v}_O^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t \cdot \mathbf{I}_O \cdot \vec{\Omega} \quad (1)$$

donde  $O$  es un punto fijo o el CM (voy a omitirlo en adelante), y la negrita indica que estamos en presencia de una matriz. Esta es la matriz del tensor de inercia, una matriz real y simétrica de 3x3 cuyas componentes son

$$\mathbf{I}_{ij} = \int \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dV \quad (2)$$

Para una elección cualquiera de las coordenadas, esta matriz posee en general elementos no diagonales. Si elegimos los ejes de forma astuta, podemos diagonalizar la matriz. Estos ejes vienen dados por los autovectores de la diagonalización

$$\mathbf{I} \cdot \vec{R} = \lambda \vec{R}, \quad \text{con} \quad \det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \Rightarrow \mathbf{I}^{(d)} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{R}$  es una matriz ortogonal (y por lo tanto de rotación),  $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1}$ , que tiene a los autovectores  $\vec{R}$  en sus *filas*. Los autovalores son los denominados ejes principales de inercia. Es decir que si rotamos los ejes entonces  $\vec{\Omega}' = \mathbf{R} \vec{\Omega}$  y la energía cinética de rotación se diagonaliza

$$\begin{aligned} T_{Rot} &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}'^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{\Omega}' = \frac{1}{2} \vec{\Omega}'^T \cdot \mathbf{I}^{(d)} \cdot \vec{\Omega}' \\ &= \frac{1}{2} I_1 \Omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \Omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \Omega_3^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Vemos que la matriz de inercia transforma en cierta manera particular frente a transformaciones ortogonales (por eso se la llama *tensor de rango 2*). Por ejemplo si transformáramos el momento angular  $\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\Omega}$  en función de las nuevas coordenadas

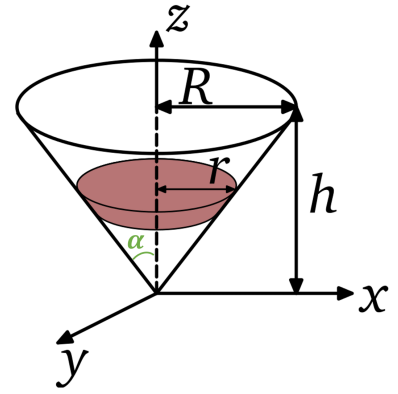
$$\begin{aligned} \vec{L}' &= \mathbf{R} \cdot \vec{L} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} \cdot \overbrace{(\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R})}^{=\mathbf{1}} \cdot \vec{\Omega} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot (\mathbf{R} \cdot \vec{\Omega}) = \mathbf{I}' \cdot \vec{\Omega}' \\ &\Rightarrow \mathbf{I}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (5)$$

Teorema de Steiner: Los tensores de inercia calculados desde un punto  $O$  y desde el  $CM$  se relacionan según

$$I_{jk}^{(O)} = I_{jk}^{(CM)} + M [\vec{a}^2 \delta_{jk} - a_j a_k], \quad \vec{a} = \vec{r}_O - \vec{r}_{CM} \quad (6)$$

### Problema 3

a) Queremos calcular el momento de inercia de un cono de altura  $h$  y radio  $R$ , alineado como en la figura. Para la energía cinética queremos  $I^{CM}$ . Sin embargo parametrizar el cono desde el CM es una tarea casi imposible. Lo más sensato sería elegir un punto donde la parametrización sea simple, el punto  $O$ , y desde allí usar Steiner para ir al CM.



Usando cilíndricas tenemos las siguientes cotas para el volumen del cono

$$0 \leq r \leq z \tan \alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h \quad (7)$$

(podríamos acotar  $z$  en función de  $r$  también). Notar que  $R = h \tan \alpha$ . Si la densidad es constante entonces  $\rho = M/V$ . El volumen del cono es

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{z \tan \alpha} r dr d\theta dz = \frac{\pi R^2 h}{3} \quad (8)$$

Antes de calcular  $\mathbf{I}^{(O)}$  pensemos que podemos esperar en base a las simetrías. Recuerden que el tensor de inercia es simétrico, así que no hay que calcular las 9 componentes sino solo 6, y usar que  $I_{ij} = I_{ji}$ . En el cono además hay simetría de revolución respecto del eje  $\hat{z}$ , vimos del ejercicio 1.n) que entonces  $r_{CM}$  está en dicho eje y que este es un eje principal de inercia. Todos los elementos fuera de la diagonal se anularán. De hecho también se puede probar que hay degeneración en el plano:  $I_{xx} = I_{yy}$ . Eso es lo bueno de las simetrías; nos ahorran cuentas (igual pueden hacerlas para convencerse). Usando simetrías pasamos de 9 integrales a 2

$$\begin{aligned} I_{xx}^{(O)} &= \rho \int (y^2 + z^2) dV = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{z \tan \alpha} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) r dr d\theta dz \\ I_{zz}^{(O)} &= \rho \int (x^2 + y^2) dV = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{z \tan \alpha} r^2 r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (9)$$

Haciendo las integrales...

$$I_{xx}^{(O)} = I_{yy}^{(O)} = \frac{3M}{20} (R^2 + 4h^2), \quad I_{zz}^{(O)} = \frac{3M}{10} R^2, \quad I_{xy}^{(O)} = I_{xz}^{(O)} = I_{yz}^{(O)} = 0 \quad (10)$$

Una vez que tenemos  $I^{(O)}$ , usando Steiner podemos calcular  $I^{(CM)}$ . Para ello primero necesitamos  $\vec{r}_{CM}$ . Ya preveníamos que iba a estar en  $\hat{z}$  por la simetría de revolución

$$\vec{r}_{CM} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{z \tan \alpha} (r \hat{r} + z \hat{z}) r dr d\theta dz = \frac{3h}{4} \hat{z} \equiv d\hat{z} \quad (11)$$

Como  $\vec{r}_O = 0$  entonces  $\vec{a} = -\vec{r}_{CM}$ , con  $a_x = a_y = 0$  y  $a_z = -d$ . Usando Steiner

$$I_{jk}^{(CM)} = I_{jk}^{(O)} - M [\vec{a}^2 \delta_{jk} - a_j a_k] \Rightarrow \begin{cases} I_{xx}^{(CM)} = I_{xx}^{(O)} - Md^2 = I_{yy}^{(CM)} \\ I_{zz}^{(CM)} = I_{zz}^{(O)} \end{cases} \quad (12)$$

Como la matriz es diagonal,  $x, y, z$  son los ejes principales de inercia; solemos llamarlos  $I_{xx} \equiv I_1, I_{yy} \equiv I_2, I_{zz} \equiv I_3$ . Resumiendo

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1^{(O)} = I_2^{(O)} = \frac{3M}{20}(R^2 + 4h^2) \\ I_3^{(O)} = \frac{3M}{10}R^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} I_1^{(CM)} = I_2^{(CM)} = \frac{3M}{20}(R^2 + \frac{h^2}{4}) \\ I_3^{(CM)} = \frac{3M}{10}R^2 \end{cases}$$

A este tipo de objetos que tienen dos momentos principales de inercia iguales se los suele llamar *trompos simétricos*.

d) Para calcular el cubo es útil tener en cuenta otra propiedad de simetría, sugerida en el problema 1.q). Un cuerpo tiene simetría de orden  $m = 2\pi/\alpha$  si es invariante frente a una rotación en un ángulo  $\alpha$ . En la figura 1 vemos algunos ejemplos.

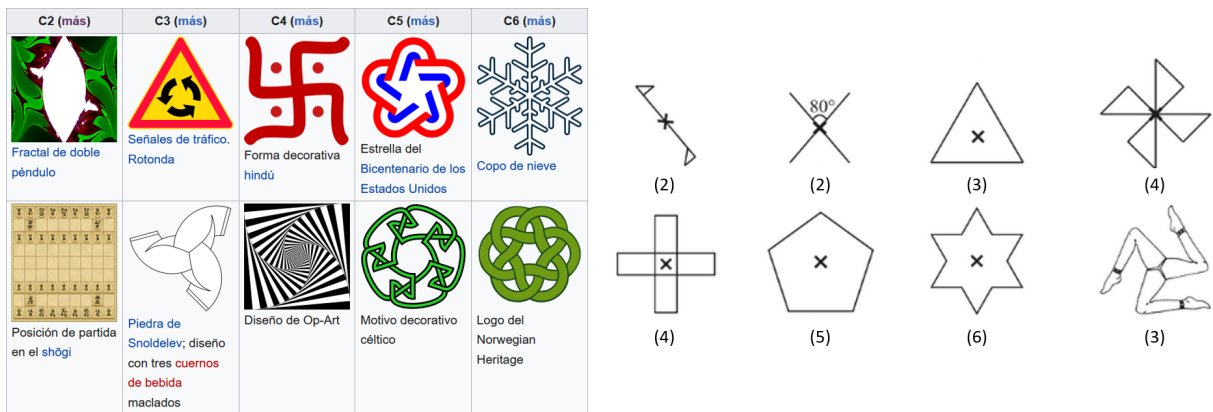


Figura 1: Orden de simetría rotacional para distintas figuras.

Por ejemplo si el orden es 2 ( $\alpha = \pi$ ) en un eje  $\hat{3}$ , entonces el tensor de inercia debe ser invariante frente a rotaciones en  $\pi$

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad \text{para una rotación } \mathbf{R} \text{ en } \pi \text{ alrededor de } \hat{z}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \pi & \sin \pi & 0 \\ -\sin \pi & \cos \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & -I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_{m=2} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \quad (13)$$

entonces  $\hat{3}$  es un eje principal.

En el caso en el orden sea mayor a 2 ( $\alpha < \pi$ ), se puede probar que no solo  $\hat{3}$  es un eje principal sino que además los otros dos ejes están degenerados, es decir

$$\mathbf{I}_{m>2} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

En el cilindro esto también valía; allí  $\alpha = 0$  y el orden es  $\infty$ . Para un cuadrado, el orden es 4 ( $\alpha = \pi/2$ ). Para el cubo también es 4, pero hay más de un eje de simetría.

b) Solo quiero hacer un comentario técnico sobre distribuciones superficiales. En general uno lo que hace es poner una densidad superficial  $\sigma$  imponiendo a mano que  $z = 0$ , por ejemplo

$$I_{xx} = \int \sigma(y^2 + 0) dx dy \quad (15)$$

Esto es como pasar diferenciales dividiendo; técnicamente está mal pero como el resultado es el mismo lo usamos. Sin embargo, formalmente la manera correcta sería incluir una delta de Dirac en la densidad volumétrica:

$$\rho(\vec{r}) = \sigma \delta(z) \quad \Rightarrow \quad I_{xx} = \int \sigma \delta(z) (y^2 + z^2) dx dy dz \quad (16)$$

Como  $\int \delta(z - z_0) f(z) = f(z_0)$ , la delta anula la integral en  $z$  y el resultado es el mismo.

## Problema 7: Ángulos de Euler

Para trabajar en los ejes principales es conveniente utilizar la convención de los ángulos de Euler (ver capítulo 4.4 del Goldstein), donde elegimos los tres ángulos de rotación siguiendo los tres pasos de la figura 2.

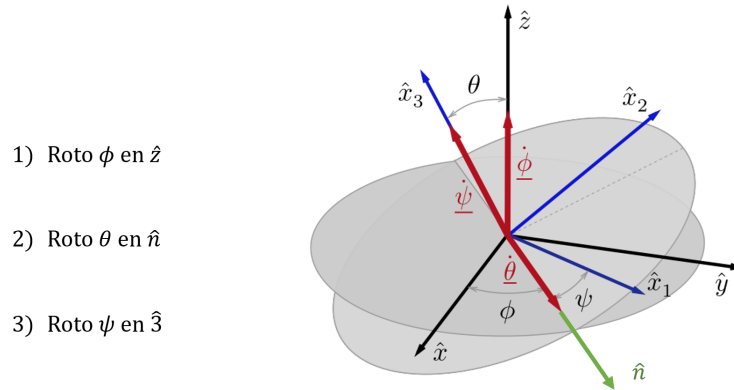


Figura 2: Ángulos de Euler.

Los ejes principales estarán fijos al cuerpo. Podemos escribir estos pasos en forma matemática como la sucesión de tres rotaciones

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_\phi &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{R}_\theta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 \mathbf{R}_\psi &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{17}$$

Aplicando cada rotación vamos obteniendo los nuevos versores

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_\phi \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{2}' \\ \hat{3} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \mathbf{R}_\psi \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{2}' \\ \hat{3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{2} \\ \hat{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{18}$$

(1)
(2)
(3)

Finalmente

$$1) + 2) + 3) : \quad \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{2} \\ \hat{3} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{R}_\phi \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Así obtenemos la velocidad angular, que podemos descomponer en los ejes del cuerpo o en los cartesianos (usando que  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ )

### ANGULOS DE EULER

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{n} + \dot{\psi} \hat{3}$$

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \Omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \Omega_y = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \\ \Omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{cases} \quad (20)$$

- Por ejemplo, de (18) es fácil descomponer a la nodal en ambos sistemas

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{pmatrix} &= R_\phi \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{2}' \\ \hat{3} \end{pmatrix} &= R_\psi^T \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{2} \\ \hat{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n} = \cos \psi \hat{1} - \sin \psi \hat{2} \end{aligned} \quad (21)$$

Aplicando estas descomposiciones en  $\vec{\Omega}$  obtenemos algunas componentes de (20). El resto les queda para ustedes.

Observación: Los ángulos de la figura 2 fueron definidos respecto de los ejes  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ . En este caso, la línea de nodos coincide con la dirección de  $\hat{\rho}$  en polares. Pero  $(x, y, z)$  son solo etiquetas. Si para un ejercicio nos queda más cómodo cambiar estas etiquetas, podemos hacerlo. Por ejemplo si un cuerpo rota con  $\dot{\phi} = cte$  pero alrededor del eje  $\hat{x}$  en vez de  $\hat{z}$ , entonces conviene cambiar etiquetas (OJO, siempre manteniendo una terna de mano derecha):  $(x, y, z) \rightarrow (z, x, y)$ .