Ejercicio 8

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right]$$

$$\omega = 2\pi / t_c$$

$$y(t=0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \iff a_0 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right]$$

Derivo término a término:

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n\omega\, a_n \sin(n\omega t) + n\omega\, b_n \cos(n\omega t) \right]$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \qquad \text{Energía cinética}$$

$$y'(t)^2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{-n\omega\, a_n \sin(n\omega t)}_{\tilde{a}_n} + \underbrace{n\omega\, b_n \cos(n\omega t)}_{\tilde{b}_n} \right] \right]^2$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n + \tilde{b}_n \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_m + \tilde{b}_m \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{a}_n + \tilde{b}_n)(\tilde{a}_m + \tilde{b}_m) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Big[n m \, \omega^2 a_n \sin(n\omega t) \, a_m \sin(m\omega t) -$$

$$- n m \omega^2 a_n \sin(n\omega t) \, b_m \cos(m\omega t) -$$

$$- n m \omega^2 b_n \cos(n\omega t) \, a_m \sin(m\omega t) +$$

$$+ n m \omega^2 b_n \cos(n\omega t) \, b_m \cos(n\omega t) \Big]$$

$$U = mg\, y(t) = mg \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right]$$

Sea $\mathcal{L} = T - U$ el lagrangiano

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{t_c = 2\pi/\omega} \mathcal{L} \, dt \quad \text{es la acción}$$

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^{2\pi/\omega} \Bigg[\frac{m}{2} \Bigg[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Big[& n m \omega^2 a_n \sin(n\omega t)\, a_m \sin(m\omega t) \; - \\
& - n m \omega^2 a_n \sin(n\omega t)\, b_m \cos(m\omega t) \; - \\
& - n m \omega^2 b_n \cos(n\omega t)\, a_m \sin(m\omega t) \; + \\
& + n m \omega^2 b_n \cos(n\omega t)\, b_m \cos(m\omega t) \Big] \\
& - m g \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Big[-a_n + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \Big] \Bigg] dt
\end{aligned}
$$

Sacando la sumatoria fuera de la integral queda a resolver: (Usar Wolphram Alpha)

1. $$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega t) \sin(m\omega t)\, dt$$

si $n \neq m \Rightarrow \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\, dt = 0$

si $n = m \Rightarrow \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(n\omega t)\, dt = \frac{\pi}{\omega}$

2. $$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega t) \cos(m\omega t)\, dt = 0 \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

3. $$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt$$

Si $n \neq m$: $$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = 0$$

Si $n = m$: $$\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(n\omega t)\,dt = \frac{\pi}{\omega}$$

4. $$\int_0^{2\pi/\omega} 1\,dt = \frac{2\pi}{\omega}$$

5. $$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega t)\,dt = 0$$

integro en un periodo

6. $$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega t)\,dt = 0$$

Para $n = m$:

$$\Rightarrow I = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{m}{2}\left[n^2\omega\pi a_n^2 + n^2\omega\pi b_n^2\right] + mg\frac{2\pi}{\omega}a_n\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{2}n^2\omega\pi a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{2}n^2\omega\pi b_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} mg\frac{2\pi}{\omega}a_n$$

Ahora quiero ver que, a partir de la variación de los parámetros, la acción sea mínima:

$$\delta I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial I}{\partial a_n} \delta a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial I}{\partial b_n} \delta b_n = 0$$

pero δa_n y δb_n son variaciones independientes

$\Rightarrow$ para que $\delta I = 0 \quad \forall\, \delta a_n, \delta b_n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0 \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial I}{\partial b_n} = 0$$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2} n^2 \omega \pi a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2} n^2 \omega \pi b_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} mg \frac{2\pi}{\omega} a_n$$

Calculo $\frac{\partial I}{\partial a_k}$ y $\frac{\partial I}{\partial b_k}$ para un k genérico:

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = m k^2 \omega \pi a_k + mg \frac{2\pi}{\omega} = 0$$

Va solo a sobrevivir el término k-ésimo

$$\Rightarrow k^2 \omega a_k = -\frac{2g}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow a_k = \frac{-2g}{k^2 \omega^2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = m k^2 \omega \pi b_k = 0 \Leftrightarrow b_k = 0 \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n + a_n \cos(n\omega t) =$$

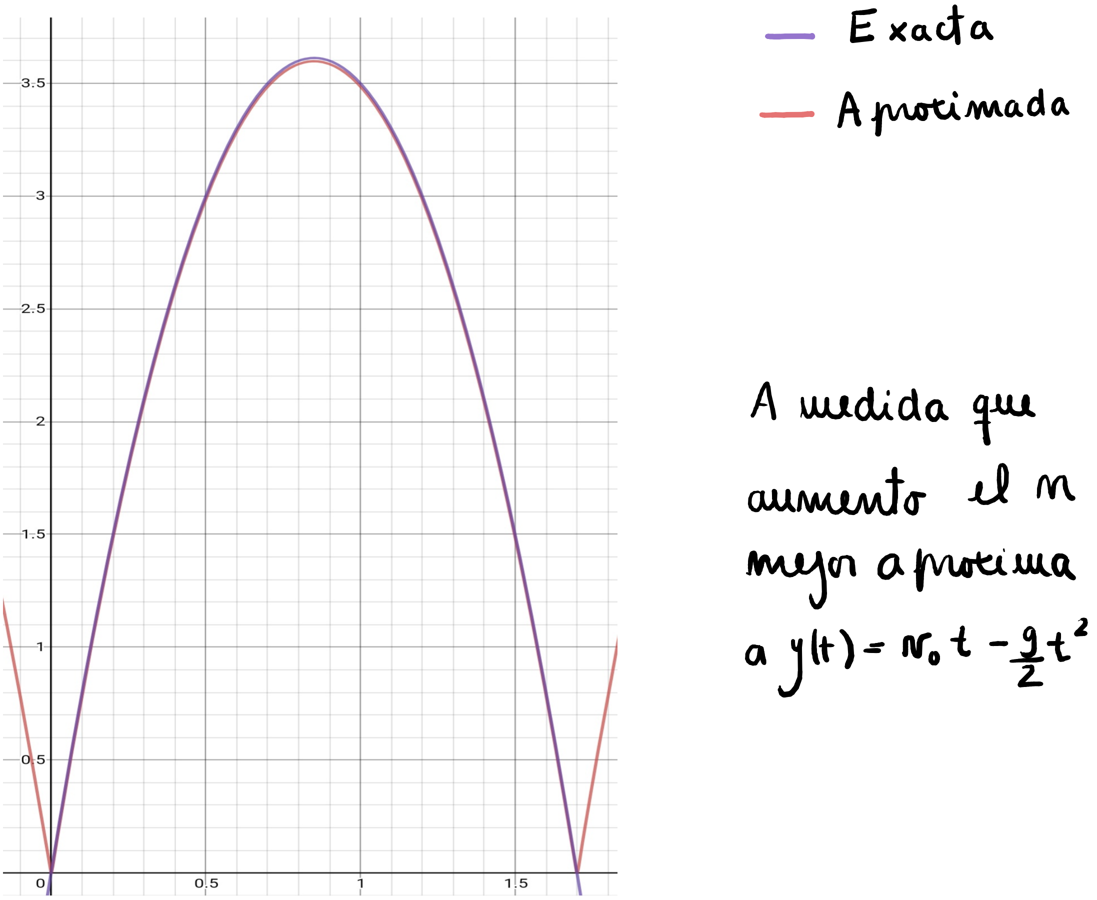
$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g}{n^2\omega^2} - \frac{2g}{n^2\omega^2}\cos(n\omega t)$$

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_0^2}{n^2\pi^2 g} - \frac{2v_0^2}{n^2\pi^2 g}\cos\left(n\frac{g\pi}{v_0}t\right)}$$

$$\omega = \frac{g\pi}{v_0}$$

Empleando la aplicación Desmos grafiqué la solución exacta y el resultado aproximado obtenido anteriormente:

$n = 100$



A medida que aumenta el n mejor aproxima a $y(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$

Aproximada:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2} n^2 \omega \pi a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2} n^2 \omega \pi b_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} mg \frac{2\pi}{\omega} a_n$$

$$\Rightarrow I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2} n^2 \omega \pi \frac{4g^2}{n^4\omega^4} - mg \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{2g}{n^2\omega^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m\pi g^2}{n^2\omega^3} - \frac{4mg^2\pi}{n^2\omega^3} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2m\pi g^2}{n^2\omega^3} = -2m\pi \frac{v_0^3}{\pi^3 g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$= -2m \frac{v_0^3}{\pi^2 g} \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{m}{3} \frac{v_0^3}{g}$$

Exacta:

$$y(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

$$\dot{y}(t) = v_0 - gt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{m}{2} (v_0 - gt)^2 - mg (v_0 t - g/2\, t^2)$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{t_c} \left[\frac{m}{2} (v_0^2 - 2v_0 g t + g^2 t^2) - mgv_0 t + \frac{m}{2} g^2 t^2 \right] dt$$

$$= \int_0^{t_c} \left[\frac{m}{2} v_0^2 - 2mv_0 g t + mg^2 t^2 \right] dt =$$

$$I = \int_0^{t_c} \left[\frac{m}{2} v_0^2 - 2 m v_0 g t + m g^2 t^2\right] dt$$

$$I = m \left[\frac{v_0}{2}^2 t - 2 v_0 g \frac{t^2}{2} + m g^2 \frac{t^3}{3}\right] \Bigg|_0^{t_c = 2\frac{v_0}{g}}$$

$$I = m \frac{v_0^3}{g} - m v_0 g \, 4 \frac{v_0^2}{g^2} + m g^2 \frac{8}{3} \frac{v_0^3}{g^3} =$$

$$= m \frac{v_0^3}{g} - 4 m \frac{v_0^3}{g} + \frac{8}{3} m \frac{v_0^3}{g} = -\frac{m}{3} \frac{v_0^3}{g}$$

Puede observarse que $I_{aprox} = I_{exacta} = -\frac{m}{3} \frac{v_0^3}{g}$

por lo tanto la solución aproximada obtenida converge a la solución exacta.

Comentario sobre convergencia

Notar que si se quisiese derivar y evaluar en el tiempo inicial, no quedaría v_0 porque la serie de cosenos no tiene una derivada definida en este punto . ¿Qué pasa si en cambio uso una trayectoria de senos únicamente cambiando la frecuencia [1]?

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(\frac{n\pi t}{t_c}) \tag{1}$$

Si sigo el mismo procedimiento que realicé con la función propuesta por el ejercicio ahora con (1) llego a:

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8v_0^2}{gn^3\pi^3}[(-1)^{n+1} + 1]sin(\frac{gn\pi t}{2v_0})} \tag{2}$$

La expresión (2) corresponde a la serie de Fourier de la extensión impar de $y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ y tiene derivada continua (Figura 1).

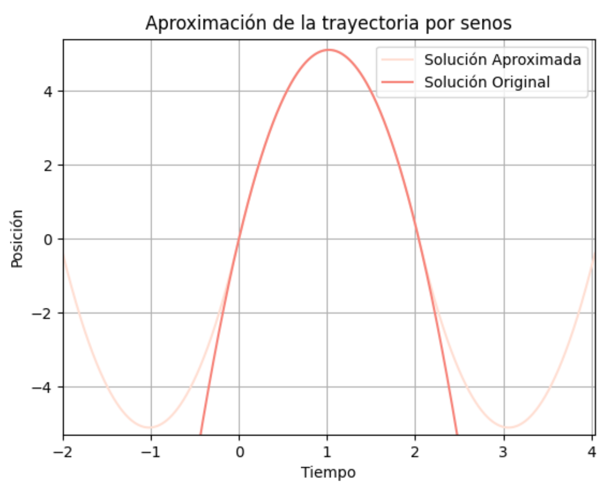


Figura 1: Aproximación de la extensión impar.

$$\boxed{y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4v_0}{n^2\pi^2}[(-1)^{n+1} + 1]cos(\frac{gn\pi t}{2v_0})} \tag{3}$$

Al evaluar (3) en $t = 0$ se obtiene $y'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4v_0}{n^2\pi^2}[(-1)^{n+1} + 1]$ y puede comprobarse que esto converge a v_0. Además, puede verse en la Figura 2 que la derivación de (2) da una buena aproximación de la velocidad de la partícula.

[1] De lo contrario tendría un nodo en $t_c/2$ que no tiene sentido porque se sabe no vuelve a $y = 0$ hasta t_c.

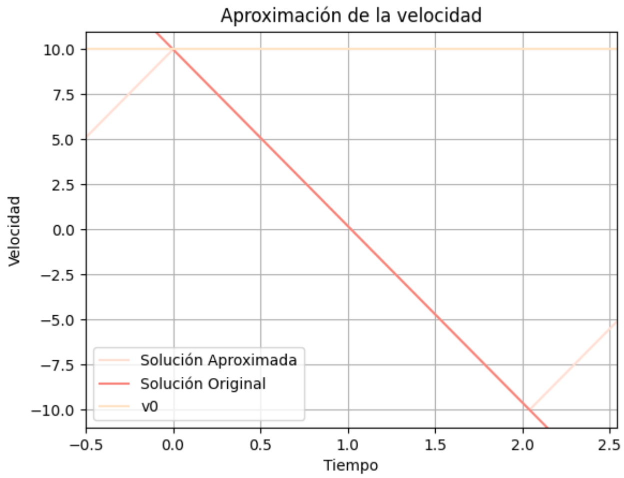


Figura 2: Aproximación de velocidad a partir de la derivación $y(t)$ de senos.