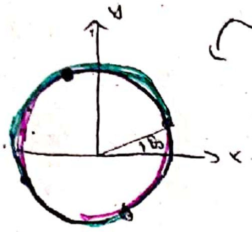
Problema 9

El potencial está determinado por las distancias sobre el aro, es decir, los arcos de circunferencia que hay entre dos pares de partículas.

$$V = \frac{k}{2}\left(a|\theta_2-\theta_1| - l_0\right)^2 + \frac{k}{2}\left(a|\theta_3-\theta_2| - l_0\right)^2 + \frac{k}{2}\left(a|\theta_4-\theta_3| - l_0\right)^2 +$$

$$+ \frac{k}{2}\left(a|2\pi+\theta_1-\theta_4| - l_0\right)^2 =$$



Para escribir el potencial de pequeñas oscilaciones, voy a determinar las posiciones de equilibrio. Como los resortes y las masas son idénticos, el equilibrio será cuando estén m_1, m_2, m_3 y m_4 equiespaciados.

$$\rightarrow \begin{cases} \theta_{1eq} = \theta_0 \\ \theta_{2eq} = \theta_0 + \frac{\pi}{2} \\ \theta_{3eq} = \theta_0 + \pi \\ \theta_{4eq} = \theta_0 + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Eligiendo las coordenadas $\eta_i = \theta_i - \theta_{ieq}$ el potencial queda

$$V = \frac{k}{2}a^2\left(\underbrace{(\eta_2-\eta_1)}_{\text{por lo que se sacó el módulo.}} + \left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_0}{a}\right)\right)^2 + \frac{k}{2}a^2\left((\eta_3-\eta_2) + \left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_0}{a}\right)\right)^2 +$$

$$+ \frac{k}{2}a^2\left((\eta_4-\eta_3) + \left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_0}{a}\right)\right)^2 + \frac{k}{2}a^2\left((\eta_1-\eta_4) + \left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_0}{a}\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{ka^2}{2}\left[(\eta_2-\eta_1)^2 + (\eta_3-\eta_2)^2 + (\eta_4-\eta_3)^2 + (\eta_1-\eta_4)^2 + 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_0}{a}\right)\left[\cancel{(\eta_2-\eta_1)} + \cancel{(\eta_3-\eta_2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cancel{(\eta_4-\eta_3)} + \cancel{(\eta_1-\eta_4)}\right] + \left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_0}{a}\right)^2\right]$$

$$= \frac{k}{2}a^2\left[(\eta_2-\eta_1)^2 + (\eta_3-\eta_2)^2 + (\eta_4-\eta_3)^2 + (\eta_1-\eta_4)^2\right] + \underbrace{\frac{ka^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_0}{a}\right)^2}_{cte}$$

$$= \frac{k}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{l_0}{a}\right)^2 + \frac{k}{2}a^2\left[2\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + 2\eta_3^2 + 2\eta_4^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3 - 2\eta_3\eta_4 - 2\eta_1\eta_4\right]$$

$$\rightarrow \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & -k \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ -k & 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

→ Divido por a^2 que multiplica todo el $\mathcal{V}$.

Scanned with CamScanner

Por su parte la energía cinética es:

$$T=\frac{m}{2}a^2\left(\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2+\dot\theta_3^2+\dot\theta_4^2\right)=\frac{m}{2}a^2\left(\dot\eta_1^2+\dot\eta_2^2+\dot\eta_3^2+\dot\eta_4^2\right)$$

$$\rightarrow \mathbb{T}=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0\\ 0 & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & m\end{pmatrix}$$

Para encontrar las frecuencias de oscilación del sistema puede resolverse el sistema $|\mathbb{V}-\omega^2\mathbb{T}|=0$.

$$\left|\begin{pmatrix} 2k-\omega^2m & -k & 0 & -k\\ -k & 2k-\omega^2m & -k & 0\\ 0 & -k & 2k-\omega^2m & -k\\ -k & 0 & -k & 2k-\omega^2m\end{pmatrix}\right| =$$

$$=(2k-\omega^2m)\left[(2k-\omega^2m)\left[(2k-\omega^2m)^2-k^2\right]+k\left[-k(2k-\omega^2m)\right]\right]+$$

$$+k\left[-k[k^2]-k\left[(2k-\omega^2m)^2-k^2\right]\right]+k\left[-k[k^2]-k\left[(2k-\omega^2m)^2-k^2\right]\right]=$$

$$=(2k-\omega^2m)^4-k^2(2k-\omega^2m)^2-k^2(2k-\omega^2m)-k^2(2k-\omega^2m)^2-k^4+k^4+k^4-k^4-k^2(2k-\omega^2m)^2=$$

$$=(2k-\omega^2m)^4-4k^2(2k-\omega^2m)^2=0$$

Las raíces de esto son $\omega_1^2=0$, $\omega_2^2=4\frac{k}{m}$, $\omega_{3,4}^2=\frac{2k}{m}$. Esta última es una frecuencia degenerada (es raíz de la derivada del polinomio característico resultante).

Cálculo de autovalores

$\omega_1^2=0$

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & -k\\ -k & 2k & -k & 0\\ 0 & -k & 2k & -k\\ -k & 0 & -k & 2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\\a_{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

i) $2ka_{11}-ka_{12}-ka_{14}=0$

$2a_{11}-a_{12}=a_{14}$

ii) $-ka_{12}+2ka_{13}-ka_{14}=0$

$\cancel{-a_{12}}+2a_{13}-2a_{11}\cancel{+a_{12}}=0$

$a_{13}=a_{11}$

iii) $-a_{11}+2a_{12}-a_{13}=0$

$-2a_{11}=-2a_{12}$

$a_{12}=a_{11}$

$\rightarrow a_{14}=a_{11}$

$$\rightarrow \vec a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Traslación rígido

$\omega_2^2=4\frac{k}{m}$

$$\begin{pmatrix} -2k & -k & 0 & -k\\ -k & -2k & -k & 0\\ 0 & -k & -2k & -k\\ -k & 0 & -k & -2k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\a_{23}\\a_{24}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

i) $-2a_{21}-a_{22}-a_{24}=0$

$a_{24}=-2a_{21}-a_{22}=-a_{21}$

ii) $-a_{21}-2a_{22}-a_{23}=0$

$-2a_{21}=2a_{22}$

$a_{21}=-a_{22}$

iii) $-a_{22}-2a_{23}-a_{24}=0$

$-a_{22}-2a_{23}+a_{22}+2a_{21}=0$

$\rightarrow a_{23}=a_{21}$

$$\rightarrow \vec a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\omega_{3,4}^2=\frac{2k}{m}$

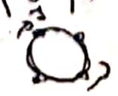
$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 & -k\\ -k & 0 & -k & 0\\ 0 & -k & 0 & -k\\ -k & 0 & -k & 0\end{pmatrix}$$

i) $-a_{32}=a_{34}$

$-a_{41}=a_{43}$

El sistema queda indeterminado, se eligen los vectores $\vec a_3$, $\vec a_4$.

$$\vec a_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix};\quad \vec a_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$



Scanned with CamScanner

NORMALIZACIÓN DE LAS SOLUCIONES

$$\vec{a}_i^{\,t}\,\mathbb{T}\,\vec{a}_i = 1 \;\rightarrow\; \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{4m}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{4m}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{a}_4 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

CALCULO DE COORDENADAS NORMALES

$$\xi_i = \vec{a}_i^{\,t}\,\mathbb{T}\,\vec{\eta}$$

$$\xi_1 = \vec{a}_1^{\,t}\,\mathbb{T}\,\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{4m}}(1\;1\;1\;1)\begin{pmatrix}m&0&0&0\\0&m&0&0\\0&0&m&0\\0&0&0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\\eta_2(t)\\\eta_3(t)\\\eta_4(t)\end{pmatrix} = \frac{m}{\sqrt{4m}}(\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4)$$

$$\xi_2 = \frac{m}{\sqrt{4m}}(\eta_1-\eta_2+\eta_3-\eta_4)$$

$$\xi_3 = \frac{m}{\sqrt{2m}}(-\eta_2+\eta_4)$$

$$\xi_4 = \frac{m}{\sqrt{2m}}(\eta_1-\eta_3)$$

PUEDO RECUPERAR LAS COORDENADAS η_i A PARTIR DE LAS COORDENADAS NORMALES

$$\eta_1 = \left[\frac{\xi_1+\xi_2}{2} + \frac{1}{\sqrt2}\xi_4\right]\frac{2}{\sqrt m} \qquad \eta_3 = \left[\frac{\xi_1+\xi_2}{2} - \frac{1}{\sqrt2}\xi_4\right]\frac{2}{\sqrt m}$$

$$\eta_2 = \left[\frac{\xi_1-\xi_2}{2} - \frac{1}{\sqrt2}\xi_3\right]\frac{2}{\sqrt m} \qquad \eta_4 = \left[\frac{\xi_1-\xi_2}{2} + \frac{1}{\sqrt2}\xi_3\right]\frac{2}{\sqrt m}$$

COMO LAS COORDENADAS GENERALIZADAS DESACOPLAN LOS MOVIMIENTOS DEL SISTEMA PUEDO PROPONER SOLUCIONES DE LA FORMA

$$\xi_i = A_i\cos(w_i t + \varphi_i)$$

A $t=0$

$$\xi_1 = A_1\cos(\varphi_1) = 0 \rightarrow \varphi_1 = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \xi_1 = A_1\sin(w_1 t)$$

ESTO TAMBIÉN SUCEDE CON ξ_3 Y ξ_4

$$\xi_1'(t=0) = w_1 A_1 \rightarrow A_1 = 0$$

$$\xi_2(t=0) = A_2\cos(\varphi_2) = b \qquad A_2 = \frac{b}{\cos(\varphi_2)}$$

$$\xi_2'(t=0) = -w_2 A_2 \sin(\varphi_2) = 0 \rightarrow \varphi_2 = 0 \Rightarrow \xi_2(t) = b\cos(\varphi_2 t)$$

$\Rightarrow$ SOLO ES EXCITADO EL SEGUNDO MODO NORMAL.

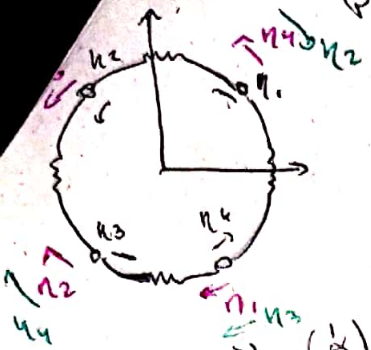
$$\eta_1 = \frac{b}{\sqrt m}\cos(\varphi_2 t) \qquad \eta_3 = \frac{b}{\sqrt m}\cos(\varphi_2 t)$$

$$\eta_2 = -\frac{b}{\sqrt m}\cos(w_2 t) \qquad \eta_4 = -\frac{b}{\sqrt m}\cos(\varphi_2 t)$$

RESTANDO LAS POSICIONES DE EQUILIBRIO CORRESPONDIENTES PUEDEN OBTENERSE LOS $\theta_i(t)$.

Scanned with CamScanner

POR SIMETRÍAS.



$$S_H = \begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix} \begin{cases}\eta_1=\eta_4\\ \eta_2=-\eta_3\\ \eta_3=-\eta_2\\ \eta_4=-\eta_1\end{cases} \qquad S_V = \begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \begin{cases}\eta_1=-\eta_2\\ \eta_2=-\eta_1\\ \eta_3=-\eta_4\\ \eta_4=-\eta_3\end{cases}$$

PROPONGO $\vec a = \begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

TRANSFORMO SIMÉTRICAMENTE RESPECTO DE V

$S_V \vec a = \begin{pmatrix}-\alpha\\-1\\-\gamma\\-\beta\end{pmatrix}$ DE IGUALAR A $\vec a$ SALE QUE $\begin{cases}-\alpha=1\\-1=\alpha\\-\gamma=\beta\\-\beta=\gamma\end{cases}$

$\vec a_{SV} = \begin{pmatrix}1\\-1\\ \beta\\-\beta\end{pmatrix}$

TRANSFORMO ANTISIMÉTRICAMENTE RESPECTO DE V

$S_V \vec a = \begin{pmatrix}-\alpha\\-1\\-\gamma\\-\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-\alpha\\-\beta\\-\gamma\end{pmatrix} \rightarrow \vec a_{AV} = \begin{pmatrix}1\\1\\ \beta\\ \beta\end{pmatrix}$ $\begin{cases}-\alpha=-1\\-1=-\alpha\\-\gamma=-\beta\\-\beta=-\gamma\end{cases}$

TRANSFORMO $\vec a_A$ ANTISIMÉTRICAMENTE RESPECTO DE H → (ANTIS. V Y ANTIS H)

$S_H \vec a_{SV} = \begin{pmatrix}-\beta\\-\beta\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-\beta\\-\beta\end{pmatrix} \rightarrow \vec a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\mathbb{V}\vec a_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \omega^2 m \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rightarrow \omega_1^2 = 0$

TRANSFORMO $\vec a_{AV}$ SIMÉTRICAMENTE RESPECTO DE H → (ANTIS V Y SIM H)

$S_H \vec a_{SV} = \begin{pmatrix}-\beta\\-\beta\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\ \beta\\ \beta\end{pmatrix} \rightarrow \vec a_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\mathbb{V}\vec a_2 = 2k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \omega_3^2 m \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \omega_3^2 = \frac{2k}{m}$ → (SIM V Y ANTI H)

SIMÉTRICO RESPECTO DE V Y ANTISIMÉTRICO RESPECTO DE H

$S_H \vec a_{AV} = \begin{pmatrix}+\beta\\-\beta\\+1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-\beta\\ \beta\end{pmatrix} \rightarrow \vec a_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\mathbb{V}\vec a_4 = 2k\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \omega_4^2 m \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \rightarrow \omega_4^2 = \frac{2k}{m}$ → FRECUENCIA DEGENERADA

SIMÉTRICO RESPECTO DE V Y SIMÉTRICO RESPECTO DE H → (SIM V Y SIM H)

$S_H \vec a_{SV} = \begin{pmatrix}+\beta\\-\beta\\+1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\ \beta\\-\beta\end{pmatrix} \rightarrow \vec a_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\mathbb{V}\vec a_2 = 4k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \omega_2^2 m \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \omega_2^2 = \frac{4k}{m}$

→ SE LLEGA A LOS AUTOVALORES Y AUTOVECTORES MUCHO MÁS RÁPIDO.

Scanned with CamScanner