Ejercicio 10 Guía 3

Autor: Vladimir D. Rodríguez Chariarse

1. Dispersión por un potencial: introducción

Una buena parte del conocimiento de la estructura de la materia se obtiene mediante experimentos de dispersión (itscattering). En forma general un experimento de dispersión para estudiar un blanco consiste en enviar un conjunto de proyectiles del mismo tipo sobre dicho blanco y observar a la salida el producto de la interacción entre ambos. Los proyectiles pueden ser partículas cargadas o no, rayos X, rayos cósmicos de alta energía (Proyecto Auger), protones contra antiprotones en el LHC (gran colisionador de hadrones) en el CERN, etc.

En Mecánica Clásica se estudia la denominada dispersión por un potencial, pues el problema de dos cuerpos se puede reducir a uno de un cuerpo en un potencial. En la teórica han visto el paso del sistema CM al sistema Laboratorio. Una breve pero significativa referencia (aparte del apunte de las teóricas) es el libro de Landau.

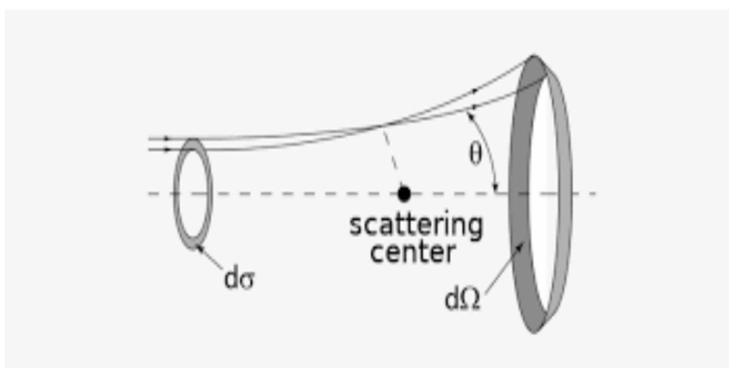


Figura 1: *Dispersión por un potencial.*

Para cuantificar el experimento se define como sección eficaz $d\sigma(\chi)$ al cociente entre el número de partículas por unidad de tiempo dn_χ que salen con ángulos de dispersión entre χ y $\chi + d\chi$, dividido sobre el número de partículas incidente por unidad de tiempo y de área N_i (este flujo incidente se asume uniforme).

$$d\sigma(\chi) = \frac{dn_\chi}{N_i} \tag{1}$$

de la definición se deduce que $d\sigma(\chi)$ tiene unidades de área, de allí su nombre sección eficaz.

La forma de cálculo para el caso de Mecánica Clásica es directa: hay una correspondencia entre el parámetro de impacto s y el ángulo de dispersión χ. De modo que todas las partículas con parámetro de impacto entre s y $s+ds$ van a parar a la corona mostrada en la figura, entre χ y $\chi + d\chi$. Por consiguiente:

$$dn_\chi = N_i 2\pi s ds$$

con lo que la sección eficaz es:

$$d\sigma(\chi) = 2\pi s ds$$

Finalmente reescribimos en término de la variable observada χ (cambio de variables):

$$d\sigma(\chi) = 2\pi s(\chi) \left| \frac{ds(\chi)}{d\chi} \right| d\chi$$

Es mas útil definir una sección eficaz por intervalo de ángulo sólido,

$$d\Omega = 2\pi \sin(\chi) d\chi$$

usando esto obtenemos la denominada sección eficaz diferencial:

$$\frac{d\sigma(\Omega_\chi)}{d\Omega} = \frac{1}{\sin(\chi)} \left| \frac{ds}{d\chi} \right|$$

Una notación alternativa es θ en lugar de χ. Para la sección eficaz diferencial se usan distintas notaciones:

$$\sigma(\Omega_\chi) \Leftrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) \Leftrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \tag{2}$$

En el apunte de la teórica se usa la primera notación. La sección eficaz total es la integral de la sección eficaz diferencial, y sólo es finita en Mecánica Clásica si el potencial se anula a partir de un cierto $r_{max}(s_{max})$.

La relación entre s y χ se obtiene de dos posible maneras:

i) En forma geométrica como vamos a ver en el P10.

ii) Usando la ecuación de la trayectoria, en la cual se emplea: que el momento angular y la energía son:

$$L_z = \mu v_\infty s \qquad E = \mu \frac{v\infty^2}{2}$$

y que:

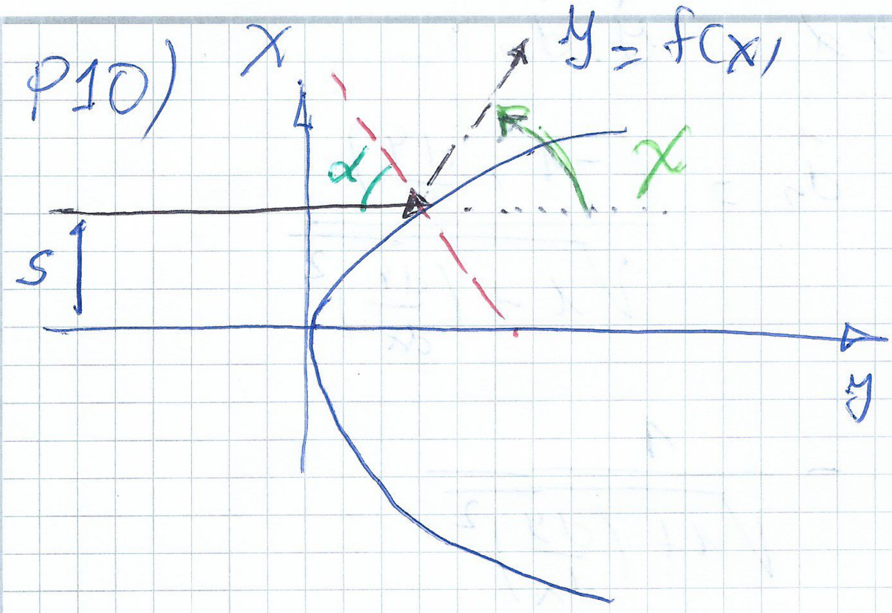
$$\chi = \pi - 2|\phi_0|$$

con

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{L_z^2 [E - V(r)] - 1/r^2}}}$$

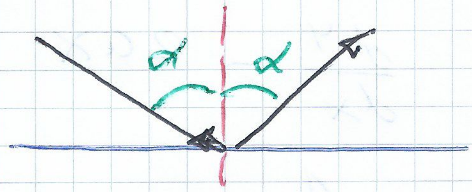
siendo r_{min} el valor de r para el cual $\dot{r} = 0$ (el que anula el denominador). Como ejemplo de este cálculo en el apunte de la teórica está la sección eficaz diferencial de Rutherford.

P10)



Paraboloide de revolución.

* Usaremos que en choque con superficie dura.



(ampliación de la zona de impacto)

(Se invierte la componente vertical de la velocidad)

Se conserva $p_{\parallel}$ y E. $\Rightarrow p_{\perp}' = -p_{\perp}$

$$\chi = \pi - 2\alpha$$

α es el ∡ entre la normal a la curva en $x = s$, y el eje y.

Dirección tangente: $\vec{d}_t \propto (dy, dx) \propto \left(\frac{dy}{dx}, 1\right)$

Normal: $\vec{d}_n \propto \left(-1, \frac{dy}{dx}\right)$

tal que: $\vec{d}_t \cdot \vec{d}_n = 0$

eje y: $\hat{y} = (1, 0)$

Por lo que

$$\cos\alpha = \hat{y} \cdot \hat{d}_n$$

$$\hat{d}_n = \frac{\left(-1, \frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

i) En este caso $\quad y = ax^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2ax$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+4a^2s^2}} \qquad (x=s)$$

$$\chi = \pi - 2\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+4a^2s^2}}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+4a^2s^2}} = \cos\left(\frac{\pi-\chi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

$$s = \left[\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} - 1\right)\Big/ 4a^2\right]^{1/2}$$

$$S = \frac{1}{2a}\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

Comparado con el caso de Rutherford:

$$S = \frac{|\alpha|}{2E}\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

tomando $a = \frac{E}{|\alpha|}$

debe dar la misma sección eficaz diferencial. Verifiquemos.

$$\sigma(\Omega_\chi) = \frac{S}{\sin\chi}\left|\frac{dS}{d\chi}\right|$$

$$\frac{dS}{d\chi} = \frac{1}{4a}\csc^2\left(\frac{\chi}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \sigma(\Omega_\chi) = \frac{1}{8a^2\left(2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}\right)}\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)}$$

$$\boxed{\sigma(\Omega_\chi) = \frac{1}{16a^2}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\chi}{2}\right)}}$$

Si $a = \frac{E}{|\alpha|}$

Rutherford.

$$\boxed{\sigma(\Omega_\chi) = \frac{\alpha^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\chi}{2}\right)}}$$

✓