Pequeñas Oscilaciones

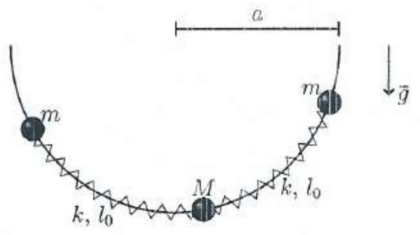
P4. (3 puntos) El sistema de la figura está formado por tres masas, dos laterales m y una masa central M. Las masas se encuentran enhebradas en un aro vertical de radio a, y están unidas como indica la figura mediante dos resortes (enhebrados) de constante k y longitud natural l_0.

a) Elija un conjunto de coordenadas generalizadas y escriba el Lagrangiano.

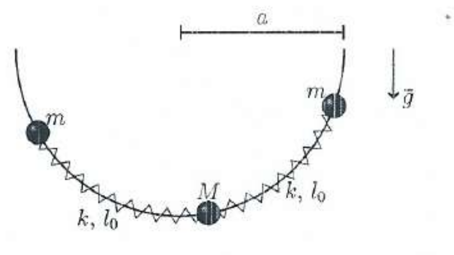
b) Si se miden los ángulos θ desde el centro del aro y con respecto a la vertical, ¿Cuanto vale θ_{20} de equilibrio? Calcule la constante k en función de los datos, para que la posición de equilibrio sea $\theta_{10} = \pi/2$ y $\theta_{30} = -\pi/2$.

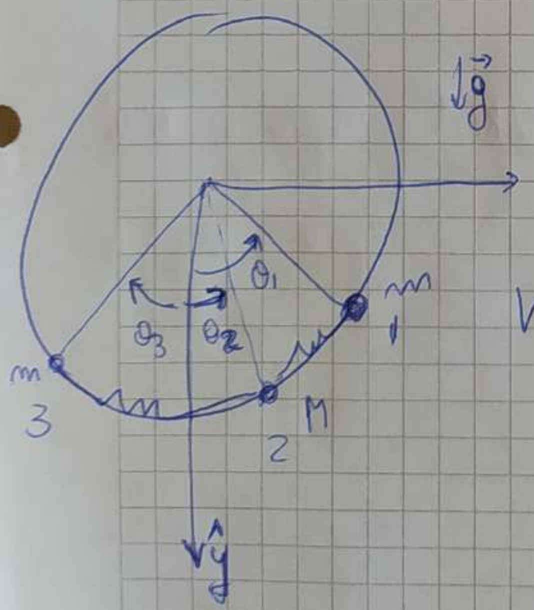
c) Escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones en un entorno de la configuración de equilibrio estable.

d) Encuentre las frecuencias y los modos normales de oscilación y grafique cualitativamente el movimiento del sistema correspondiente a cada modo. *Ayuda* Puede usar simetrías y dejar expresadas dos soluciones en función de las raices ed una ecuación cuadrática.



a) Elija un conjunto de coordenadas generalizadas y escriba el Lagrangiano.





a) $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} \rightarrow$ Coord. generalizadas

$$T = \frac{m a^2 \dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{M a^2 \dot{\theta}_2^2}{2} + \frac{m a^2 \dot{\theta}_3^2}{2}$$

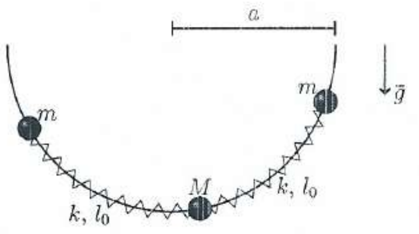
$$V = \frac{k}{2}\left[a(\theta_1 - \theta_2) - l_0\right]^2 + \frac{k}{2}\left[a(\theta_2 - \theta_3) - l_0\right]^2$$

$$- m g a \cos\theta_1 - M g a \cos\theta_2 - m g a \cos\theta_3$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

Utilizo coordenadas polares, como coordenadas generalizadas tomo a los ángulos $\theta_{1,2,3}$ desde el eje y. Y expreso la energía cinética, potencial elástico y gravitatorio.

b) Si se miden los ángulos θ desde el centro del aro y con respecto a la vertical, ¿Cuanto vale θ_{20} de equilibrio? Calcule la constante k en función de los datos, para que la posición de equilibrio sea $\theta_{10} = \pi/2$ y $\theta_{30} = -\pi/2$.



Para ver las posiciones de equilibrio vemos en que condiciones se anula las derivadas parciales del potencial V respecto a $\theta_{1,2,3}$.

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = K[a(\theta_1 - \theta_2) - l_0]\,a + m g a \,\mathrm{sen}\,\theta_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = -K[a(\theta_1 - \theta_2) - l_0]\,a + K[a(\theta_2 - \theta_3) - l_0]\,a + M g a \,\mathrm{sen}\,\theta_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_3} = -K[a(\theta_2 - \theta_3) - l_0]\,a + m g a \,\mathrm{sen}\,\theta_3 = 0 \qquad (3)$$

Para simplificar este conjunto de ecuaciones contemplanos las simétricas del problema. Dada la simetría de reflexión en el eje vertical, $\theta_{20} = 0$ y $\theta_{10} = -\theta_{30}$ (esto último puede verse con la ecuación (2))

Luego la ecuación (1) y (3) nos dice la misma información, para que el equilibrio se de con $\theta_{10} = -\theta_{30} = \pi/2$, ***k y lo*** tienen que valer :

$$K\left[a\left(\frac{\pi}{2}\right) - l_0\right]a + m g a = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{mg}{l_0 - \frac{\pi}{2}a} \; , \quad l_0 > \frac{\pi}{2}a}$$

c) Escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones en un entorno de la configuración de equilibrio estable.

Vamos a utilizar las condiciones del item b), es decir con las posiciones de equilibrio $\theta_{10} = -\theta_{30} = \pi/2$

Para la aproximación necesitamos las derivadas segundas parciales del potencial evaluadas en las posiciones de equilibrio. Derivar respecto a θ_1 o θ_3 dá lo mismo. Luego con estos términos podemos construir la matríz del potencial.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} = k a^2 - m g a \cos\theta_1 \Big|_{\pi/2} = k a^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} = 2 k a^2 + M g a \underbrace{\cos\theta_2}_{1} \Big|_{0} = 2 k a^2 + M g a = K' a^2$$

$$\overbrace{\left(2K + \frac{Mg}{a}\right)}^{K'} a^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = -k a^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_3 \partial \theta_2}$$

Primero reedefinimos los desplazamientos respecto a las posiciones de equilibrios:

$$\text{Sea} \begin{cases} \eta_1 = a(\theta_1 - \theta_{10}) \\ \eta_2 = a(\theta_2 - \theta_{20}) \\ \eta_3 = a(\theta_3 - \theta_{30}) \end{cases}$$

c) Escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones en un entorno de la configuración de equilibrio estable.

Finalmente tenenemos la matriz cinética y potencial, que son simétricas y definidas positivas:

Sea $\begin{cases} \eta_1 = a(\theta_1 - \theta_{10}) \\ \eta_2 = a(\theta_2 - \theta_{20}) \\ \eta_3 = a(\theta_3 - \theta_{30}) \end{cases}$

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k' & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^t \, \mathbb{T} \, \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2} \vec{\eta}^t \, \mathbb{V} \, \vec{\eta}$$

d) Encuentre las frecuencias y los modos normales de oscilación y grafique cualitativamente el movimiento del sistema correspondiente a cada modo. *Ayuda* Puede usar simetrías y dejar expresadas dos soluciones en función de las raices ed una ecuación cuadrática.

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k' & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^{t}\, T\, \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2} \vec{\eta}^{t}\, V\, \vec{\eta}$$

Con el Lagrangiano en aproximación, resolver Euler-Lagrange implica buscar los autovectores y autovalores que satisfagan:

$$V \vec{a} = \omega^2 T \vec{a}$$

Para eso tenemos dos opciones:

1) Resolver con $\det(V-\omega^2 T) = 0$, y hayar los tres autovalores ω del problema y los autovectores

2) Aprovechar las simétrias:

Como el sistema es simétrico en reflexión en el plano vertical, el Lagraniano es invariante ante esta reflexión y por lo tanto los existen modos simétricos y antisimétricos ante esa reflexión.

d) Encuentre las frecuencias y los modos normales de oscilación y grafique cualitativamente el movimiento del sistema correspondiente a cada modo. *Ayuda* Puede usar simetrías y dejar expresadas dos soluciones en función de las raices ed una ecuación cuadrática.

Modo simétrico

Para exitar a este modo la masa del medio M debe quedar quieta y solo oscilar en contrafase las masas m.

Modo Simétrico

$\vec{a}_1$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad V\vec{a} = \begin{pmatrix}k\\0\\-k\end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix}m\\0\\-m\end{pmatrix}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$$

Modos antisimétricos

En este caso quedan dos ecuaciones que las juntamos en una ecuación de 2do orden, resolvemos y nos quedan dos soluciones para α .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\\alpha\\1\end{pmatrix} \qquad V\vec{a} = \begin{pmatrix}k - K\alpha\\ -2K + K'\alpha\\ -K\alpha + K\end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix}m\\ \alpha M\\ m\end{pmatrix}$$

d) Encuentre las frecuencias y los modos normales de oscilación y grafique cualitativamente el movimiento del sistema correspondiente a cada modo. *Ayuda* Puede usar simetrías y dejar expresadas dos soluciones en función de las raices ed una ecuación cuadrática.

Modos antisimétricos

En este caso quedan dos ecuaciones que las juntamos en una ecuación de 2do orden, resolvemos y nos quedan dos soluciones para α .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V\vec{a} = \begin{pmatrix} K - K\alpha \\ -2K + K'\alpha \\ -K\alpha + K \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} m \\ \alpha M \\ m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} K(1-\alpha) = m\omega^2 \\ -2K + \alpha K' = \alpha M \omega^2 \end{cases}$$

Dividiendo : $\dfrac{K(1-\alpha)}{-2K + \alpha K'} = \dfrac{m}{\alpha M}$

$$K\alpha M - K\alpha^2 M = -2mK + \alpha m K'$$

$$KM\alpha^2 + (-KM + K'm)\alpha - 2mK = 0$$

$$\alpha_\pm = \frac{(KM - K'm) \pm \sqrt{(K'm - KM)^2 + 8K^2 mM}}{2MK}$$

$$\omega_+^2 = \frac{K}{m}(1 - \alpha_+)$$

$$\omega_-^2 = \frac{K}{m}(1 - \alpha_-)$$

Solución general

$$\eta(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \begin{pmatrix}1\\ \alpha_+ \\ 1\end{pmatrix} C_2 \cos(\omega_+ t + \varphi_2) + \begin{pmatrix}1\\ \alpha_- \\ 1\end{pmatrix} C_3 \cos(\omega_- t + \varphi_3)$$