

Simetrías y Peg. Osc.

Prob: Sist. con peg. osc.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\vec{n}}^t \Pi \dot{\vec{n}} - \frac{1}{2} \vec{n}^t V \vec{n} \quad (1)$$

Sea S transformación lineal que deja $\mathcal{L}$ invariante (la misma forma):

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{n}' = S \vec{n} \\ \Rightarrow \vec{n} = S^t \vec{n}' \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} S^t = S \\ S^2 = \mathbb{I} \end{array} \right. \quad (3)$$

(2) en (1): usamos que: $\vec{n}^t \Rightarrow \vec{n}'^t S$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \vec{n}'^t \underbrace{S \Pi S^t}_{\Pi} \vec{n}' - \frac{1}{2} \vec{n}'^t \underbrace{S V S^t}_{V} \vec{n}'$$

Por hipótesis tienen la misma forma:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} S \Pi S^t = \Pi \\ S V S^t = V \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} S \Pi S = \Pi \\ S V S = V \end{array}$$

Sea $\vec{a}$ / modo normal.

$$\underbrace{V}_{S^2} \vec{a} = \omega^2 \underbrace{\Pi}_{S^2} \vec{a}$$

Multiplicando por S :

$$\underbrace{S V S}_{S^2} \vec{a} = \omega^2 \underbrace{S \Pi S}_{S^2} \vec{a}$$

$$V (S \vec{a}) = \omega^2 \Pi (S \vec{a})$$

o
o

Si $\bar{a}$ es modo $\Rightarrow \mathcal{S}\bar{a}$
también lo es.

Aplicamos otra vez sobre

a) $\bar{a}$ es no degenerado (No hay
dos modos con la misma ω).

$$\Rightarrow \mathcal{S}\bar{a} = \lambda \bar{a} \quad \left(\begin{array}{l} \text{sólo puede} \\ \text{ser} \\ \text{múltiplo} \end{array} \right)$$

Aplicamos $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}^2 \bar{a} = \lambda \mathcal{S} \bar{a}$$

$$\bar{a} = \lambda^2 \bar{a}$$

o
o

$$\lambda = \pm 1$$

Entonces

$$\mathcal{S}\bar{a}_{\pm} = \pm \bar{a}_{\pm}$$

$\bar{a}$ es simétrico (+) o
antisimétrico (-).
ante $\mathcal{S}$

b) $\bar{a}$ es degenerado (Forma un
sub-espacio degenerado)

Formamos la combinación:

$$\bar{a}_{\pm} = (\mathcal{S} \pm \mathbb{I}) \bar{a}$$

que también son modos normales de frecuencia ω .

Aplicamos $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \bar{a}_{\pm} &= \mathcal{D} (\mathcal{D} \pm \mathbb{I}) \bar{a} \\ &= (\mathbb{I} \pm \mathcal{D}) \bar{a} \\ &= \pm (\mathcal{D} \pm \mathbb{I}) \bar{a} = \pm \bar{a}_{\pm}^{\dagger}\end{aligned}$$

Entonces:

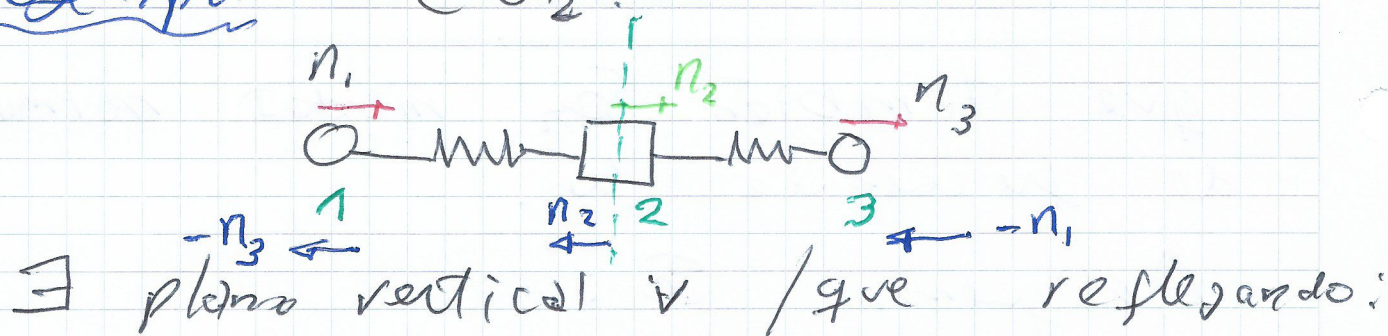
$\bar{a}_{\pm}$ es simétrico (+) o antisimétrico (-) ante $\mathcal{D}$

Si $\mathcal{D}$: transformación que deja invariante $\mathcal{L}$.

$\Rightarrow$ todos los autovectores se pueden elegir /

$$\mathcal{D} \bar{a}_{\pm}^{\dagger} = \pm \bar{a}_{\pm}^{\dagger}$$

Ejemplo: CO_2 :



$$\begin{cases} n'_3 = -n_1 \\ n'_2 = -n_2 \\ n'_1 = -n_3 \end{cases}$$

$$\vec{n}' = \mathcal{S} \vec{n}$$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m \dot{n}_1^2 + M \dot{n}_2^2 + m \dot{n}_3^2) - \frac{k}{2} [(n_2 - n_1)^2 + (n_3 - n_2)^2]$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (m \dot{n}'_3{}^2 + M \dot{n}'_2{}^2 + m \dot{n}'_1{}^2) - \frac{k}{2} [(n'_3 - n'_2)^2 + (n'_2 - n'_1)^2]$$

$\mathcal{L}'$ es de la misma forma que $\mathcal{L}$.
(sólo cambia la notación)

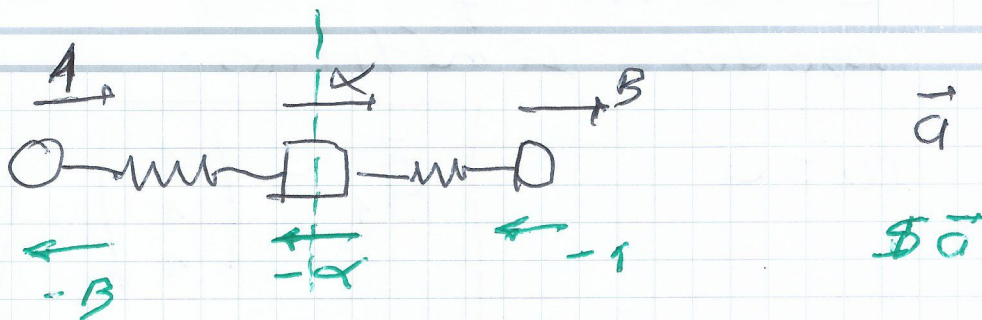
Podemos probar (no es necesario):

$$\begin{cases} \mathcal{S} = \mathcal{S}^* \\ \mathcal{S} \cdot \mathcal{S} = \mathbb{I} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} \nabla \mathcal{S} = \nabla$$

$$\mathcal{S} \nabla \mathcal{S} = \nabla$$

Sea $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un modo normal



$$\Phi \vec{a} = \begin{pmatrix} -B \\ -x \\ -1 \end{pmatrix} = \pm \vec{a} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ B \end{pmatrix}$$

Modo Simétrico: (+):

$$\begin{aligned} -B &= 1 & B &= -1 \\ -x &= x & \Rightarrow x &= 0 \\ -1 &= B & B &= -1 \end{aligned}$$

0
0

$$\vec{a}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

hay un solo modo simétrico

Modo antisimétrico (-)

$$\begin{aligned} -B &= -1 & B &= 1 \\ -x &= -x & \Rightarrow x &= x \\ -1 &= -B & B &= 1 \end{aligned}$$

$$\vec{a}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que hay dos
modos simétricos:

$$W=0$$

$$\bar{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha=1)$$

Por ortogonalidad según Π :

$$\bar{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\alpha = -\frac{2m}{M} \right)$$