Guía 4: Pequeñas oscilaciones

Mecánica Clásica
2^{do} Cuatrimestre de 2020
Sebastián E. Nuza

Motivación física:

Veamos el ejemplo sencillo de una partícula sometida a un potencial unidimensional $V(x)$ tal que

$$E = T(\dot{x}) + V(x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x).$$

Si queremos aproximar el potencial en el entorno de un punto de equilibrio estable x_{eq} podemos escribir:

$$V(x) \simeq V(x_{\text{eq}}) + \underbrace{\left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x_{\text{eq}}}}_{=0} (x - x_{\text{eq}}) + \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x_{\text{eq}}}}_{\equiv k} (x - x_{\text{eq}})^2$$

Entonces, en esta aproximación, la energía corresponde a la de un oscilador armónico, es decir

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}(x - x_{\text{eq}})^2.$$

La idea es aplicar la misma aproximación en el caso de sistemas mecánicos con N grados de libertad.

Formulación en Mecánica Clásica:

Si los vínculos del problema **no dependen del tiempo** la energía cinética se puede escribir como

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

La función m_{ij} depende de las coordenadas generalizadas y puede aproximarse **a primer orden** como

$$m_{ij}(\mathbf{q}) \simeq m_{ij}(\mathbf{q}_{\text{eq}}) + \sum_{k=1}^{N} \left.\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right|_{\mathbf{q}_{\text{eq}}} (q_k - q_{k,\text{eq}})$$

Reemplazando esta aproximación en la energía cinética T se obtiene, **a segundo orden** en las velocidades:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

en donde hemos definido la matriz $m_{ij} \equiv m_{ij}(\mathbf{q}_{\text{eq}})$. Por definición, esta última es una **matriz simétrica** de *valores constantes*. Por otro lado, el potencial puede aproximarse **a segundo orden** según

$$V(\mathbf{q}) \simeq V(\mathbf{q}_{\text{eq}}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\mathbf{q}_{\text{eq}}} (q_i - q_{i,\text{eq}})(q_j - q_{j,\text{eq}}).$$

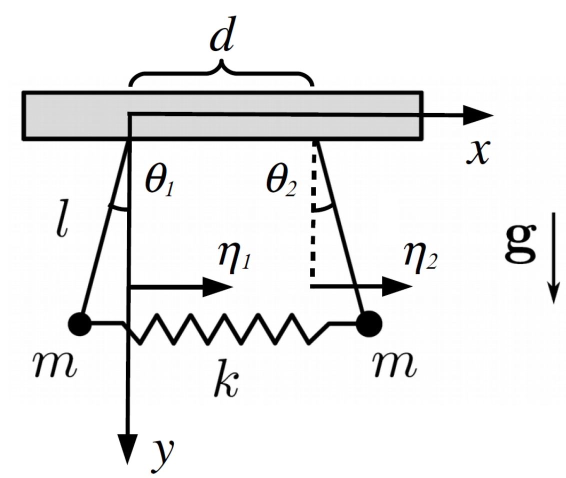
Si ahora definimos la **matriz simétrica** de *valores constantes* $V_{ij} \equiv \partial^2 V/\partial q_i \partial q_j|_{\mathbf{q}_{\text{eq}}}$ y el **apartamiento** $\eta_i \equiv q_i - q_{i,\text{eq}}$, el Lagrangiano del sistema se puede escribir como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}\eta_i\eta_j + \text{constante}$$

Si a este Lagrangiano se le aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada grado de libertad se obtiene el siguiente sistema de N ecuaciones diferenciales acopladas ($k = 1, ..., N$):

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (m_{ki}\ddot{\eta}_i + V_{ki}\eta_i) = 0} \tag{1}$$

Ejercicio 3



Claramente, el problema tiene 2 grados de libertad. En primer lugar busquemos los modos normales del sistema. La idea entonces es escribir la energía cinética y el potencial a *segundo orden* en las velocidades generalizadas y los apartamientos, respectivamente.

Para el sistema de coordenadas elegido, el potencial se escribe como

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -mgy_1 - mgy_2 + \underbrace{\frac{k}{2}\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - d\right)^2}_{\text{potencial elástico}} \tag{2}$$

Como la posición de equilibrio del sistema es $\theta_1 = \theta_2 = 0$ podemos elegir los ángulos directamente como los apartamientos. Además, si las oscilaciones son pequeñas, $\theta_i \ll 1$, entonces

$$mgy_i = mgl\cos\theta_i = mgl\left(1 - \frac{\theta_i^2}{2} + \mathcal{O}(\theta^4)\right) \simeq mgl\left(1 - \frac{\theta_i^2}{2}\right) = -\frac{mgl}{2}\theta_i^2 + \text{constante}, \tag{3}$$

en donde hemos aproximado los *potenciales gravitatorios* a **segundo orden** en los apartamientos θ_i. Por otro lado, ustedes pueden verificar que el *potencial elástico* también se puede aproximar a **segundo orden** como

$$V_{\text{el}} = \frac{k}{2}\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - d\right)^2 = \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - d\right)^2 \simeq \frac{kl^2}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2\right) + \text{constante}.$$

La cuenta sale pero es un poco tediosa[1]. A partir de acá podría seguir con el problema y ustedes me tendrían que creer. Sin embargo, fíjense qué pasa si en lugar de los ángulos elegimos como apartamientos a los desplazamientos en $\hat{\mathbf{x}}$ de las masitas alrededor del equilibrio. Si lo hacemos así la cuenta se simplifica bastante.

Como los ángulos van a ser pequeños ($\theta_i \ll 1$) es fácil ver que $x_1 - x_2 \simeq l\theta_1 - (d + l\theta_2) = l(\theta_1 - \theta_2) - d$. Sin embargo, $y_1 - y_2 \simeq l(1 - \theta_1^2/2) - l(1 - \theta_2^2/2) = l(\theta_2^2 - \theta_1^2)/2$ (ver aproximación (3)). Es decir, $y_1 - y_2$ aporta términos de orden superior en el estiramiento. Entonces, si despreciamos las coordenadas y_i en el potencial elástico obtenemos

$$V_{\text{el}} = \frac{k}{2}\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - d\right)^2 = \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - d\right)^2 \simeq \frac{k}{2}\left(|x_2 - x_1| - d\right)^2$$

Si como apartamientos elegimos

$$\eta_1 \equiv x_1$$
$$\eta_2 \equiv x_2 - d,$$

$$\Rightarrow\ V_{\text{el}} \simeq \frac{k}{2}\left(|x_2 - x_1| - d\right)^2 = \frac{k}{2}\left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 = \frac{k}{2}\left(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2\right).$$

Esto es lo mismo a lo que habíamos obtenido más arriba (a menos de la constante l^2 que ahora no aparece por una cuestión de unidades).

[1] Habría que aproximar $x_i = l\sin\theta_i \simeq l\theta_i$, $y_i = l\cos\theta_i \simeq l(1 - \theta_i^2/2)$, desarrollar los cuadrados y expandir la raíz usando Taylor.

Usando que $\theta_i \simeq \eta_i/l$ en los potenciales gravitatorios (3) obtenemos

$$mgy_i \simeq mgl\left(1-\frac{\theta_i^2}{2}\right) = -\frac{mg}{2l}\eta_i^2 + \text{constante.}$$

Entonces, el *potencial total* aproximado (ignorando constantes) va a ser:

$$\boxed{U(\eta_1,\eta_2) \simeq \frac{mg}{2l}\eta_1^2 + \frac{mg}{2l}\eta_2^2 + \frac{k}{2}\left(\eta_1^2+\eta_2^2-2\eta_1\eta_2\right)}$$

Para leer los elementos de la matriz $\mathbf{V}$ es conveniente reordenar los términos del potencial:

$$U(\eta_1,\eta_2) \simeq \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{mg}{l}+k\right)\eta_1\eta_1 + \left(\frac{mg}{l}+k\right)\eta_2\eta_2 - k\eta_1\eta_2 - k\eta_2\eta_1\right\}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{l}+k & -k \\ -k & \frac{mg}{l}+k \end{pmatrix}$$

La energía cinética es muy fácil de escribir, es decir

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right) \simeq \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 = \frac{m}{2}\dot{\eta}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{\eta}_2^2$$

$$T = \frac{1}{2}(m\dot{\eta}_1\dot{\eta}_1 + m\dot{\eta}_2\dot{\eta}_2)\ \Rightarrow\ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

Nota: Si proponemos soluciones del tipo $\eta_i = \mathcal{A}_i \exp(iwt)$ para el sistema de ecuaciones (1) se obtiene $(k = 1, ..., N)$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}\left(-w^2 m_{ki} + V_{ki}\right)\mathcal{A}_i = 0} \Leftrightarrow \boxed{\left(\mathbf{V}-w^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a} = \mathbf{0}} \quad \text{con} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_N \end{pmatrix} \tag{4}$$

Si $\det\left(\mathbf{V}-w^2\mathbf{M}\right) \neq 0\ \Rightarrow$ el sistema tiene *solución trivial* $\Rightarrow\ \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Para que el sistema tenga *solución no trivial* hay que pedir $\det\left(\mathbf{V}-w^2\mathbf{M}\right) = 0$. Es decir,

$$\begin{vmatrix} \frac{mg}{l}+k-w^2m & -k \\ -k & \frac{mg}{l}+k-w^2m \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ (w^2ml-mg)(w^2ml-mg-2kl) = 0$$

$$\boxed{w_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad \boxed{w_2 = \sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}}$$

péndulos desacoplados — péndulos acoplados

Estas frecuencias corresponden a los dos **modos normales** del sistema. La primera no involucra a la constante del resorte k, por lo que la única opción de que ésto ocurra es que los dos péndulos oscilen en fase (el resorte permanece relajado). La segunda frecuencia corresponde al modo de oscilación en contrafase (el resorte puede estirarse y comprimirse).

Los autovectores asociados a cada modo salen de resolver el sistema:

$$\left(\mathbf{V} - w_i^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{a}_i = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\mathbf{a}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

A partir de la simetría del problema podríamos haber anticipado la forma de los autovectores. En situaciones muy simétricas la intuición suele ser una buena guía para "adivinar" las soluciones. Luego, no hay que olvidarse de verificar el resultado. Eso les queda a ustedes.

Propiedades: Manipulando el sistema (4) para dos modos normales k y l se puede ver que:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \mathcal{A}_i^{(k)} m_{ij} \mathcal{A}_j^{(l)} = \delta_{kl} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}_k^T \, \mathbf{M} \, \mathbf{a}_l = \delta_{kl}. \tag{5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \mathcal{A}_i^{(k)} V_{ij} \mathcal{A}_j^{(l)} = w_k^2 \delta_{kl} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}_k^T \, \mathbf{V} \, \mathbf{a}_l = w_k^2 \delta_{kl}.$$

Por completitud, vamos a normalizar las soluciones. Sabemos que para cada autovector $\mathbf{a}_i$ vale la condición de ortonormalidad (5), entonces

$$\mathbf{a}_1^T \, \mathbf{M} \, \mathbf{a}_1 = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2ma^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

Análogamente, para $\mathbf{a}_2$ sale que $b = \frac{1}{\sqrt{2m}}$.

Como el sistema de ecuaciones (1) es **lineal** la solución más general para cada grado de libertad será una *combinación lineal* de los modos normales existentes. O sea, a cada modo hay que multiplicarlo por una constante $\mathbb{C}_i$ que vendrá determinada por las condiciones iniciales del problema. Entonces, la solución general (normalizada) se escribe como

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta_1}(t) \\ \boldsymbol{\eta_2}(t) \end{pmatrix} = \frac{\mathbb{C}_1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iw_1 t} + \frac{\mathbb{C}_2}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{iw_2 t}} \tag{6}$$

Las constantes $\mathbb{C}_i \in \mathbb{C}$ y determinan las *amplitudes y fases relativas* de los distintos modos. Para calcular estas últimas es conveniente usar la **ortonormalidad** de los autovectores.

Primero tomemos parte real de la solución (6):

$$\mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta_1}(t)\\ \boldsymbol{\eta_2}(t)\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{pmatrix} = |\mathbb{C}_1|\mathbf{a}_1\cos(w_1 t+\varphi_1) + |\mathbb{C}_2|\mathbf{a}_2\cos(w_2 t+\varphi_2)$$

Si multiplicamos la expresión anterior por $\mathbf{a}_1^T\,\mathbf{M}$ *desde la izquierda* obtenemos

$$\mathbf{a}_1^T\,\mathbf{M}\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{pmatrix} = |\mathbb{C}_1|\underbrace{\mathbf{a}_1^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{a}_1}_{=1}\cos(w_1 t+\varphi_1) + |\mathbb{C}_2|\underbrace{\mathbf{a}_1^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{a}_2}_{=0}\cos(w_2 t+\varphi_1)$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{a}_1^T\,\mathbf{M}\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{pmatrix} = |\mathbb{C}_1|\cos(w_1 t+\varphi_1) \tag{7}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{a}_1^T\,\mathbf{M}\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}}\,(\eta_1(t)+\eta_2(t)) \tag{8}$$

Igualando (7) y (8) queda

$$\boxed{\sqrt{\frac{m}{2}}\,(\eta_1(t)+\eta_2(t)) = |\mathbb{C}_1|\cos(w_1 t+\varphi_1)} \tag{9}$$

Derivando esta expresión se obtiene

$$\boxed{\sqrt{\frac{m}{2}}\,(\dot\eta_1(t)+\dot\eta_2(t)) = -|\mathbb{C}_1|w_1\sin(w_1 t+\varphi_1)} \tag{10}$$

• Analizar el movimiento del sistema para las siguientes condiciones iniciales (recordar que $\eta_i \simeq l\theta_i$):

$$\theta_1(0)=\theta_0,\ \dot\theta_1(0)=\dot\theta_0,\ \theta_2(0)=0,\ \dot\theta_2(0)=0$$

Evaluando (9) y (10) en $t=0$ obtenemos

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\theta_0 = \frac{|\mathbb{C}_1|}{l}\cos(\varphi_1);\qquad \sqrt{\frac{m}{2}}\dot\theta_0 = -\frac{|\mathbb{C}_1|}{l}w_1\sin(\varphi_1)$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\tan\varphi_1 = -\frac{\dot\theta_0}{\theta_0 w_1}}\ \ \boxed{|\mathbb{C}_1| = l\sqrt{\frac{m}{2}\left(\theta_0^2+\frac{\dot\theta_0^2}{w_1^2}\right)}}$$

Estos resultados son también válidos para φ_2 y $|\mathbb{C}_2|$ si intercambiamos w_1 por w_2.

- Coordenadas normales:

<u>Nota</u>: Si definimos la matriz de autovectores columna $\mathbf{A} \equiv (\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$ la *relación de ortonormalidad* (5) se puede escribir de manera compacta para todos los modos juntos:

$$\boxed{\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{I}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T\mathbf{M}} \tag{11}$$

Las soluciones pueden escribirse como (comparar con la solución (6))

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} \mathbb{C}_1 e^{iw_1 t} \\ \vdots \\ \mathbb{C}_N e^{iw_N t}\end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\eta}}$$

Las cantidades ξ_i se conocen como **coordenadas normales**.

En este caso tenemos:

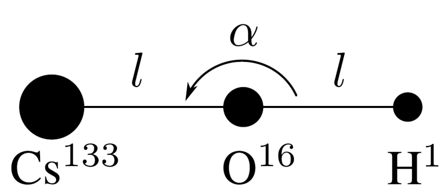
$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 0 \\ 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix}\eta_1 + \eta_2 \\ \eta_1 - \eta_2\end{pmatrix}}$$

A partir de esta última expresión y la solución (6) ustedes pueden verificar que

$$\xi_1(t) = \sqrt{\frac{m}{2}}\,(\eta_1(t) + \eta_2(t)) \;\Rightarrow\; \xi_1(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbb{C}_1 e^{iw_1 t}\right] = |\mathbb{C}_1|\cos(w_1 t + \varphi_1) \checkmark$$
$$\xi_2(t) = \sqrt{\frac{m}{2}}\,(\eta_1(t) - \eta_2(t)) \;\Rightarrow\; \xi_2(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbb{C}_2 e^{iw_2 t}\right] = |\mathbb{C}_2|\cos(w_2 t + \varphi_2) \checkmark$$

Ejercicio 4



En este ejercicio se pide calcular el lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones, las frecuencias y los modos normales. Voy a plantear el problema y les dejo a ustedes los detalles.

La molécula de CsOH es lineal en el equilibrio. Cuando vibra aparecen 3 tipos de interacciones:

- Lennard-Jones Cs-O: $V_{\text{CsO}}(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$
- Lennard-Jones O-H: $V_{\text{OH}}(r) = \frac{1}{15}V_{\text{CsO}}(r)$
- Interacción elástica CsO-OH: $V_{\text{el}}(\alpha) = \frac{kl^2}{2}(\pi-\alpha)^2$

Empecemos escribiendo el potencial exacto:

$$U(r_{\text{CsO}}, r_{\text{OH}}, \alpha) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r_{\text{CsO}}}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_{\text{CsO}}}\right)^{6}\right] + \frac{4\epsilon}{15}\left[\left(\frac{\sigma}{r_{\text{OH}}}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_{\text{OH}}}\right)^{6}\right] + \frac{kl^2}{2}(\pi-\alpha)^2$$

Sabemos que en el equilibrio las derivadas parciales de cada uno de los apartamientos deben ser nulas. Por lo tanto, podemos calcular cuánto valen r y α en el equilibrio haciendo

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r_i}\right|_{r_i=l} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{l = 2^{1/6}\sigma}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{\text{eq}}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\alpha_{\text{eq}} = \pi}$$

Para aproximar los potenciales de Lennard-Jones por un potencial elástico cerca del equilibrio vamos a buscar la “K” de los “resortes” calculando las derivadas segundas evaluadas en $r = r_{\text{eq}} = l$:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial r_{\text{CsO}}^2}\right|_{r_{\text{CsO}}=l} = \boxed{\frac{72\epsilon}{l^2} \equiv K}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial r_{\text{OH}}^2}\right|_{r_{\text{OH}}=l} = \boxed{\frac{K}{15} \equiv K'}$$

Ahora podemos escribir el potencial cerca del equilibrio en la aproximación de oscilador armónico para la separación $r_{ij} \equiv |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ entre átomos:

$$U(\mathbf{r}_{\text{Cs}}, \mathbf{r}_{\text{O}}, \mathbf{r}_{\text{H}}, \alpha) \simeq U_{\text{eq}} + \frac{K}{2}\left(|\mathbf{r}_{\text{Cs}} - \mathbf{r}_{\text{O}}| - l\right)^2 + \frac{K'}{2}\left(|\mathbf{r}_{\text{O}} - \mathbf{r}_{\text{H}}| - l\right)^2 + \frac{kl^2}{2}(\pi-\alpha)^2$$

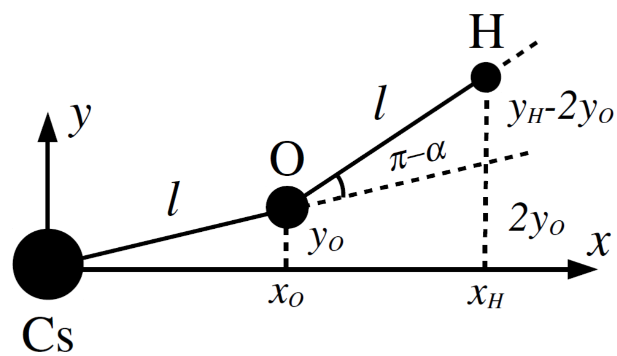


Figura: Los arcos se aproximan por rectas verticales

Como la masa del Cs es mucho más grande que la de los otros dos átomos voy a suponer que permance en reposo: $\mathbf{r}_{\mathrm{Cs}}(t) = 0$ (ver ayuda del problema). Ahora noten que para las distancias r_{ij} podemos despreciar las componentes transversales y_i ya que $x_i \sim l \gg |y_i|$, entonces $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \simeq |x_i - x_j|$. Además, la aproximación de pequeñas oscilaciones nos permite escribir

$$\pi - \alpha \simeq \sin(\pi - \alpha) \simeq \frac{(y_{\mathrm{H}} - 2y_{\mathrm{O}})}{l} \qquad \text{(ver Figura)}$$

Despejando α en la expresión anterior y juntando todo queda

$$U(\mathbf{r}_{\mathrm{Cs}}, \mathbf{r}_{\mathrm{O}}, \mathbf{r}_{\mathrm{H}}, \alpha) \simeq U_{\mathrm{eq}} + \frac{K}{2}(x_{\mathrm{O}} - l)^2 + \frac{K'}{2}(x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{O}} - l)^2 + \frac{kl^2}{2}\left(\frac{y_{\mathrm{H}} - 2y_{\mathrm{O}}}{l}\right)^2$$

Si ahora definimos los apartamientos

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= x_{\mathrm{O}} - l, \\
\eta_2 &= x_{\mathrm{H}} - 2l, \\
\eta_3 &= y_{\mathrm{O}}, \\
\eta_4 &= y_{\mathrm{H}},
\end{aligned}$$

podemos escribir el potencial *a segundo orden en los apartamientos*, que es lo que necesitamos:

$$U(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \simeq U_{\mathrm{eq}} + \frac{K}{2}\eta_1^2 + \frac{K'}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k}{2}(\eta_4 - 2\eta_3)^2 =$$

$$U_{\mathrm{eq}} + \frac{1}{2}\left(K\eta_1\eta_1 + K'(\eta_2\eta_2 + \eta_1\eta_1 - \eta_2\eta_1 - \eta_1\eta_2) + k(\eta_4\eta_4 + 4\eta_3\eta_3 - 2\eta_3\eta_4 - 2\eta_3\eta_4)\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{V} = \begin{pmatrix} K + K' & -K' & 0 & 0 \\ -K' & K' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k & -2k \\ 0 & 0 & -2k & k \end{pmatrix}$$

La energía cinética se escribe como

$$T = \frac{M}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2\right)$$

$$T = \frac{M}{2}\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_4^2\right) = \frac{1}{2}\left(M\dot{\eta}_1\dot{\eta}_1 + m\dot{\eta}_2\dot{\eta}_2 + M\dot{\eta}_3\dot{\eta}_3 + m\dot{\eta}_4\dot{\eta}_4\right)$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

El sistema que hay que resolver es

$$\left(\mathbf{V} - w^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a} = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} K + K' - w^2 M & -K' & 0 & 0 \\ -K' & K' - w^2 m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k - w^2 M & -2k \\ 0 & 0 & -2k & k - w^2 m \end{pmatrix}\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{12}$$

Notar que los **apartamientos longitudinales** (η_1, η_2) están desacoplados de los **apartamientos transversales** (η_3, η_4). Entonces, el problema original de 4×4 se reduce a 2 problemas de 2×2 que se pueden resolver independientemente.

Intuitivamente podemos identificar 4 modos normales:

- Modo longitudinal en fase: $\mathbf{a}^T \propto (+, +, 0, 0)$
- Modo longitudinal en contrafase: $\mathbf{a}^T \propto (+, -, 0, 0)$
- Modo transversal en fase: $\mathbf{a}^T \propto (0, 0, +, +)$
- Modo transversal en contrafase: $\mathbf{a}^T \propto (0, 0, +, -)$

Veamos los modos transversales $\eta_i = y_i$: una de las w_i es nula (movimiento rígido del sistema).

$$\boxed{w_3 = 0} \qquad \boxed{w_4 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{4k}{M}}}$$

rotación pura — oscilación en contrafase

Los autovectores transversales asociados son, respectivamente,

$$\mathbf{a}_3 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_4 = b\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{M}{2m} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Las frecuencias y autovectores correspondientes a los *modos longitudinales* los pueden calcular ustedes resolviendo el problema de autovalores de la parte superior izquierda de la matriz (12).