Guía 5: Cuerpo Rígido

Mecánica Clásica
2^{do} Cuatrimestre de 2020
Sebastián E. Nuza

Número de grados de libertad

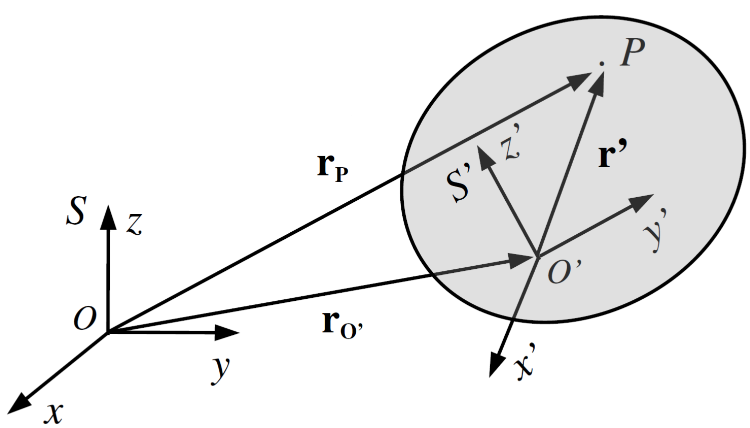
Llamamos cuerpo rígido (CR) a toda colección de partículas que mantiene invariante sus distancias relativas, es decir, que cumple que $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| =$constante $\forall\ i \neq j$. Como habíamos visto en clases anteriores, el número de grados de libertad de un sistema mecánico es $3N - k$, donde N es el número de partículas y k el número de ecuaciones de vínculo. Para un sistema de $N > 2$ partículas el número de ecuaciones independientes del tipo "$r_{ij} =$ constante" es[1]

$$k(N) = 3N - 6 \ \Rightarrow\ \#\text{g.d.l. de un CR} = 3N - k(N) = 6. \tag{1}$$

O sea, para conocer la posición de un CR en un dado instante basta con saber la posición de un punto arbitrario del cuerpo medido desde un sistema *fijo al espacio* (+3 g.d.l.) y la orientación relativa del cuerpo respecto de este último (+3 g.d.l.).

Campo de velocidades en un CR

Sean entonces los sistemas S y S' fijos al espacio y al cuerpo, respectivamente.



La posición de un punto P del rígido puede escribirse como

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'$$

Derivando con respecto al tiempo obtenemos:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' \tag{2}$$

[1] ¿Por qué? Ayuda: piensen en el número de "barras rígidas" que "unen" a las partículas del CR.

Usando el *teorema de la derivada relativa* podemos escribir la derivada del vector posición $\mathbf{r}'$ entre el sistema S (fijo al espacio) y el S' (que rota con el CR):

$$\mathbf{v}' = \left.\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right|_S = \underbrace{\left.\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right|_{S'}}_{=0 \text{ en un CR}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}'$$

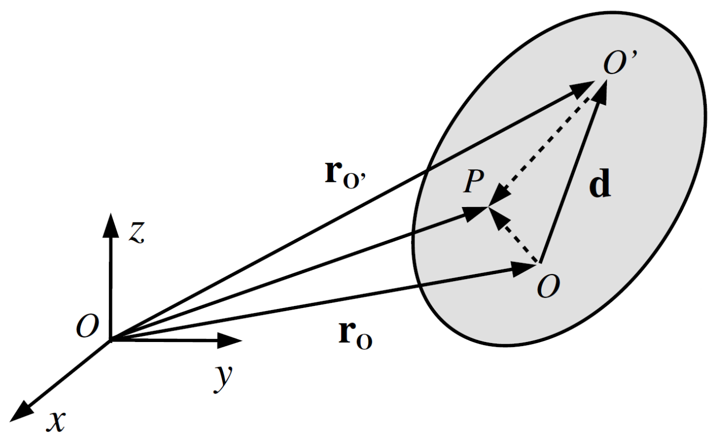
Reemplazando esta expresión en la ecuación (2), y usando que $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{O'}$, se obtiene la ecuación del campo de velocidad de un CR:

$$\boxed{\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{O'} = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{O'})} \tag{3}$$

Ejercicio 1

a) Mostrar que la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de un sistema de coordenadas ligado a un CR es independiente del sistema elegido.

Para probarlo vamos a considerar 3 puntos del cuerpo, a saber: O y O' (separados por un vector de módulo d, es decir, $\mathbf{r}_{O'} - \mathbf{r}_O = \mathbf{d}$) y otro punto P arbitrario.



La velocidad del punto P se puede escribir como (desde O y O'):

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega}_O \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O) \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega}_{O'} \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{O'}) \tag{5}$$

Igualando (4) y (5) obtenemos

$$\mathbf{v}_{O'} + (\boldsymbol{\Omega}_{O'} - \boldsymbol{\Omega}_O) \wedge \mathbf{r}_P = \underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega}_O \wedge \overbrace{(\mathbf{r}_{O'} - \mathbf{r}_O)}^{\mathbf{d}}}_{\mathbf{v}_{O'}}$$

$$\Leftrightarrow\ (\boldsymbol{\Omega}_{O'} - \boldsymbol{\Omega}_O) \wedge \mathbf{r}_P = 0\ \ (\mathbf{r}_P \text{ es arbitrario})\ \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\Omega}_{O'} = \boldsymbol{\Omega}_O}$$

Conclusión: Todos los puntos del CR tienen la misma velocidad angular en un dado instante independientemente del origen elegido.

b) Mostrar que si en un sistema de coordenadas fijo al cuerpo $\mathbf{v}_O$ y $\boldsymbol{\Omega}$ son perpendiculares entonces lo mismo es cierto para todos los puntos del CR.

Planteamos el campo de velocidades entre dos puntos O y O':

$$\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_{O'} - \mathbf{r}_O)$$

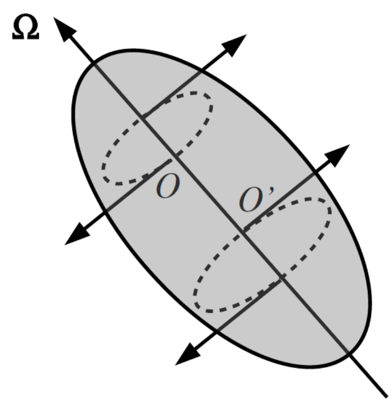
Si multiplicamos escalarmente por $\boldsymbol{\Omega}$ a ambos lados de la ecuación queda

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_{O'} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_{O'} - \mathbf{r}_O))$$

Usando ahora que $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{v}_\mathrm{O}$ son perpendiculares:

$$\boldsymbol{\Omega}\ \perp\ \mathbf{v}_\mathrm{O}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_{O'} = \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \cdot \Bigg(\overbrace{\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_{O'} - \mathbf{r}_O)}^{\text{vector} \perp \text{a}\, \boldsymbol{\Omega}} \Bigg)}_{=0}$$

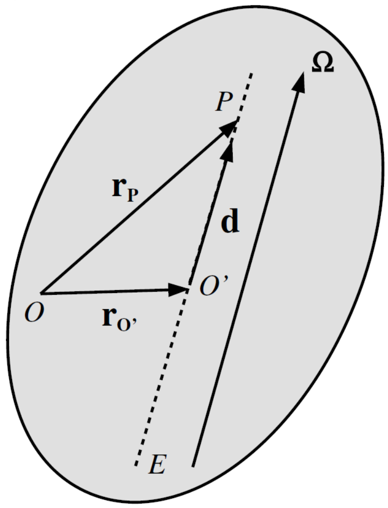
$$\Rightarrow\ \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_{O'} = 0\ \Leftrightarrow\ \boxed{\boldsymbol{\Omega}\ \perp\ \mathbf{v}_{\mathrm{O'}}}$$



Conclusión: Si en un punto del CR la velocidad es perpendicular al vector velocidad angular lo mismo es cierto para todos los puntos del cuerpo.

d) Ver que *todos los puntos* ubicados sobre una recta paralela a $\mathbf{\Omega}$ que pasa por un punto O' que tiene velocidad nula ($\mathbf{v}_{O'} = 0$) tienen también velocidad nula.

De manera análoga al item a) usamos 3 puntos para resolver el problema: O, O' y P. Vamos a elegir los puntos O' y P tal que $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{d}$, siendo $\mathbf{d}$ un vector paralelo a $\mathbf{\Omega}$, tal como muestra la figura a continuación:



La velocidad del punto P desde O es

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O)$$

Usando que $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{d}$ queda

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \wedge \big(\underbrace{\mathbf{r}_{O'} + \mathbf{d}}_{\mathbf{r}_P} - \mathbf{r}_O\big)$$

$$\mathbf{v}_P = \underbrace{\mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_{O'} - \mathbf{r}_O)}_{\mathbf{v}_{O'}} + \underbrace{\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{d}}_{=0\ (\mathbf{d}\,\|\,\mathbf{\Omega})}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} = 0}$$

Conclusión: Si existe un punto del CR con velocidad nula, la recta E paralela a $\mathbf{\Omega}$ que pasa por ese punto define el llamado *eje instantáneo de rotación* por lo que $\mathbf{v}_P = 0\ \forall P \in E$.

En rigor de verdad, la velocidad del punto O' no tiene que ser necesariamente nula. Lo que nos dice este teorema es que todos los puntos que conforman cualquier recta paralela al vector velocidad angular tienen la misma velocidad. El caso $\mathbf{v}_{O'} = 0$ es un caso particular importante.

m) Verificar que los momentos de inercia satisfacen la siguiente relación: $I_1 + I_2 \geq I_3$.

Empecemos recordando la definición de los elementos del *tensor de inercia* $\mathbf{I}$:

$$(\mathbf{I})_{ij} \equiv I_{ij} = \int \left(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right) \delta m$$

Los momentos principales de inercia corresponden a la diagonal $i = j$ ($x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$), entonces

$$I_1 = \int \left(r^2 - x^2\right) \delta m = \int (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) \delta m = \int \left(y^2 + z^2\right) \delta m$$

Análogamente,

$$I_2 = \int \left(r^2 - y^2\right) \delta m = \int \left(x^2 + z^2\right) \delta m$$

Entonces, es fácil ver que

$$I_1 + I_2 = \int \left(x^2 + y^2 + 2z^2\right) \delta m \geq \int \left(x^2 + y^2\right) \delta m = I_3 \;\Rightarrow\; \boxed{I_1 + I_2 \geq I_3}$$

o) Demostrar que si un cuerpo tiene un *eje de simetría* entonces el centro de masa (CM) del mismo está contenido en dicho eje y, además, es un *eje principal de inercia*.

Por simplicidad vamos a elegir coordenadas cilíndricas. Si z es un eje de simetría entonces la *densidad de masa* del CR permanecerá invariante ante una rotación polar. Es decir, la densidad no dependerá del ángulo φ,

$$\rho(r, \varphi, z) = \rho(r, z).$$

La posición del CM de un cuerpo continuo se escribe como

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\int \mathbf{r}\, \delta m}{M} = \frac{\int (x, y, z)\, \rho(r, z) r d\varphi dr dz}{\int \rho(r, z) r d\varphi dr dz} = \frac{\int (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, \rho(r, z) r d\varphi dr dz}{\int \rho(r, z) r d\varphi dr dz}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \left(\frac{\iint \rho(r, z) r^2 dr dz \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi}{\int \delta m}\right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\iint \rho(r, z) r^2 dr dz \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi}{\int \delta m}\right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\int z \delta m}{\int \delta m}\right) \hat{\mathbf{z}}$$

Usando que $\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0$ se obtiene

$$\boxed{\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = (0, 0, z_{\mathrm{CM}}) = z_{\mathrm{CM}}\,\hat{\mathbf{z}}}$$

Entonces, el CM está contenido en el *eje de simetría z*.

Interludio: Recordemos que los *ejes principales de inercia* son aquellos que diagonalizan el tensor de inercia $\mathbf{I}$. Es decir aquellos autovectores $\boldsymbol{a}$ tal que

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} (I_{ki} - \lambda\delta_{ki})\, a_i = 0} \;\Leftrightarrow\; \boxed{(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1})\,\boldsymbol{a} = \mathbf{0}}$$

• Para cualquier punto del CR es posible rotar los ejes hasta que la matriz de inercia sea *diagonal.*

• Notar que los autovectores $\boldsymbol{a}^{(l)}$ $(l = 1, 2, 3)$ son **ortogonales** (definen un sistema tridimensional de ejes) ya que $\mathbf{I}$ es simétrica $(I_{ij} = I_{ji})$.

• Si definimos la matriz $\mathbf{A}$ de *autovectores columna normalizados* y los *momentos principales de inercia* I_i $(I_1 \equiv I_{xx}, I_2 \equiv I_{yy}, I_3 \equiv I_{zz})$ podemos escribir

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{I}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La } \textit{matriz de rotación } \mathbf{A} \text{ es } \textit{ortogonal}, \text{ es decir, vale que } \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1} \text{ y que } \det(\mathbf{A}) = \pm 1}$$

Volviendo al ejercicio. Para que el eje de simetría sea un *eje principal de inercia* no deben existir elementos fuera de la diagonal $(I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy})$.

Por ejemplo, hagamos el cálculo para el elemento I_{zx}:

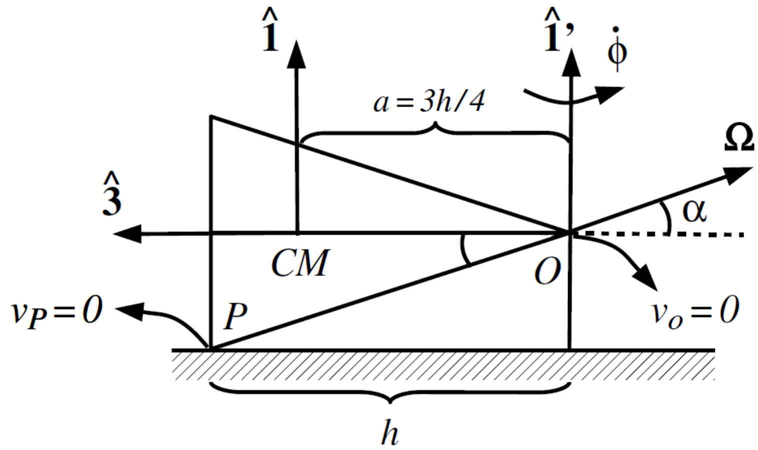
$$I_{zx} = -\int zx\delta m = -\int zr\cos\varphi\rho(r,z)rd\varphi drdz = -\iint \rho(r,z)zr^2drdz \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0 = I_{xz}$$

Análogamente, es fácil ver que $I_{yz} = I_{zy} = I_{xy} = I_{yx} = 0$.

Por lo tanto, concluimos que el *eje de simetría z* es también un *eje principal de inercia.*

Ejercicio 4

d) Halle la energía cinética de un cono homogéneo cuya base rueda en un plano y cuyo vértice está fijo a una altura sobre el plano igual al radio de la base.



Primero recordemos que si tomamos un punto fijo A ($\mathbf{v}_A = 0$) o el CM, la energía cinética de un CR se puede escribir como

$$\boxed{T = T_{\text{traslación}} + T_{\text{rotación}} = \frac{M}{2}v_A^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T\,\mathbf{I}_A\,\mathbf{\Omega}} \tag{6}$$

<u>**Interludio**</u>: Recordemos brevemente de dónde salía esta expresión. La energía cinética de una colección de N partículas es

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i|\mathbf{v}_i|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,|\mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A)\,|^2$$

en donde usamos la expresión del campo de velocidad $\mathbf{v}_i$ relativo a un punto A del CR. Expandiendo esta expresión obtenemos

$$T = \frac{M}{2}|\mathbf{v}_A|^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,|\mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A)\,|^2$$

Si elegimos un punto fijo A del CR ($\mathbf{v}_A = 0$) o el CM ($\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{\text{CM}}) = M\mathbf{r}_{\text{CM,CM}} = 0$) el segundo término se anula. Les queda a ustedes demostrar que el último término puede reescribirse como

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,|\mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A)\,|^2 = \frac{1}{2}\,\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{L}_A = \frac{1}{2}\,\mathbf{\Omega}^T\,\mathbf{I}_A\,\mathbf{\Omega}$$

Para hacer las cuentas elegimos el punto A del CR igual al CM. La matriz de inercia medida desde el sistema de *ejes principales* $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}}$ que está fijo al cono y centrado en el CM se asume conocida (en el Ejercicio 3a les piden calcular los momentos de inercia de un cono), a saber:

$$\mathbf{I}_{\mathrm{CM}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Notar que $I_1 = I_2$ por la simetría de rotación del cono. Con este *tensor de inercia* la energía cinética (6) se puede escribir como

$$T = \frac{M}{2} v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}\Omega_1^2 I_1 + \frac{1}{2}\Omega_2^2 I_1 + \frac{1}{2}\Omega_3^2 I_3.$$

Como el cono rueda sin deslizar la velocidad del punto P es nula. Por otro lado, el punto O está fijo a una altura igual al radio R de la base del cono. En consecuencia, el *eje instantáneo de rotación* está definido por la recta $\overline{OP}$ que los une.

El vector velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ del cono proyectado sobre los *ejes principales* $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}}$ será entonces

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \sin\alpha \\ 0 \\ -\Omega\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ -\Omega\cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ -\dot{\phi}\cot\alpha \end{pmatrix} \tag{7}$$

Usando que $\mathbf{v}_{\mathrm{CM}} = -a\dot{\phi}\,\hat{\mathbf{2}}$ finalmente queda

$$T = \frac{M}{2} a^2 \dot{\phi}^2 + \frac{I_1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{I_3}{2}\cot^2\alpha\,\dot{\phi}^2$$

Esta expresión se puede reescribir como

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\big(\underbrace{I_1 + Ma^2}_{I_1'}\big)\dot{\phi}^2 + \frac{I_3}{2}\cot^2\alpha\,\dot{\phi}^2}$$

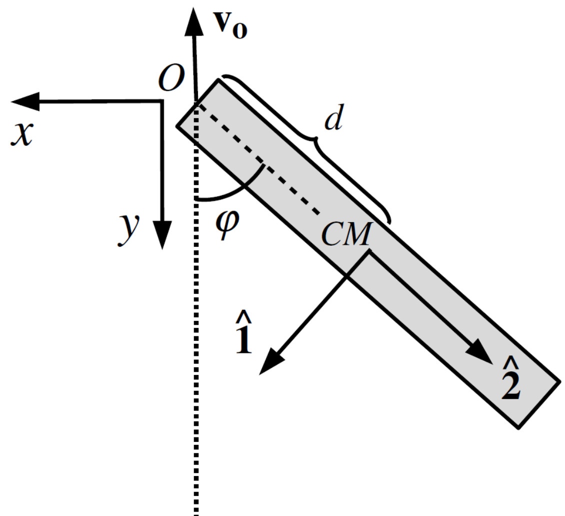
Notar que $a = 3h/4$, siendo h la altura del cono (I_1 sale de resolver el Ejercicio 3a, pueden verificar el resultado), entonces:

$$I_1 + Ma^2 = I_1 + M\left(\frac{3h}{4}\right)^2 = \frac{3}{5}M\left(h^2 + \frac{R^2}{4}\right) \equiv I_1',$$

La cantidad I_1' no es más que el momento principal de inercia con respecto a un eje $\hat{\mathbf{1}}'$ que pasa por el origen O y es paralelo a $\hat{\mathbf{1}}$ (ver Figura). Este resultado es una manifestación del teorema de *Steiner* o de los ejes paralelos.

Ejercicio 5

Un automóvil parte del reposo con una de sus pueras abiertas (a 90°). Cuando el auto se acelera la puerta se cierra. Calcular el tiempo necesario para que se cierre totalmente si la aceleración del auto es constante y el CM de la misma se encuentra a una distancia d de las bisagras.



La resolución del problema pasa por escribir correctamente la energía cinética para lo cual elegimos el CM de la puerta. Empecemos escribiendo la velocidad del CM con respecto al punto O:

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_{\text{CM}} - \mathbf{r}_O) = \mathbf{v}_O + \dot{\varphi}\hat{\mathbf{z}} \wedge (\underbrace{\mathbf{r}_{\text{CM}} - \mathbf{r}_O}_{d\,\hat{\mathbf{2}}})$$

Según el sistema de referencia elegido el punto O está acelerado con

$$\mathbf{a} = -a\hat{\mathbf{y}} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_O = -at\hat{\mathbf{y}} \quad \text{(parte del reposo)}$$

Calculando el módulo al cuadrado obtenemos

$$|\mathbf{v}_{\text{CM}}|^2 = v_{\text{CM}}^2 = a^2t^2 + \dot{\varphi}^2 d^2 + 2adt\dot{\varphi}\sin\varphi \;\Rightarrow\; T_{\text{traslación}} = \frac{M}{2}v_{\text{CM}}^2$$

La velocidad angular proyectada sobre las *ejes principales* de la puerta es

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; T_{\text{rotación}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{I_3}{2}\dot{\varphi}^2$$

El Lagrangiano entonces resulta

$$\boxed{\mathcal{L} = T - V = T = \frac{M}{2}a^2t^2 + \frac{M}{2}\dot{\varphi}^2 d^2 + Madt\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{I_3}{2}\dot{\varphi}^2}$$

Para encontrar la ecuación de movimiento del problema vamos a calcular la ecuación de Euler-Lagrange para φ. Eso se los dejo a ustedes. Cuando hagan la cuenta van a llegar a la siguiente ecuación de movimiento:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \left(\frac{Mad}{I_3 + Md^2}\right)\sin\varphi = 0} \tag{8}$$

Esta es la ecuación de movimiento de un **péndulo físico**, por lo tanto la solución $\varphi(t)$ será oscilatoria.

Hay dos aspectos importantes que vale la pena remarcar:

- La aceleración $-\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{y}}$ hace las veces de gravedad (el auto es un sistema no inercial).
- $w^2 \equiv Mad/(I_3 + Md^2)$ tiene unidades de frecuencia al cuadrado como es de esperar. En particular, si $I_3 = 0$ recuperamos la ecuación del péndulo simple

  $$\ddot{\varphi} + w^2 \sin\varphi = 0,$$

  con $w^2 = a/d$ ("g/l") la frecuencia de oscilación en la aproximación de pequeñas oscilaciones.

Para obtener el **tiempo que tarda la puerta en cerrarse** integramos la ecuación (8) entre la posición inicial $\varphi(0) = \pi/2$ y un ángulo arbitrario $\varphi(t) = \varphi$, y entre las velocidades angulares $\dot{\varphi}(0) = 0$ y $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}$. Luego, integramos nuevamente entre la posición inicial $\varphi(0) = \pi/2$ y final $\varphi = 0$, y los tiempos $t = 0$ y $t = \tau_{\text{cierre}}$. El resultado es

$$\boxed{\tau_{\text{cierre}} = \sqrt{\frac{I_3 + Md^2}{2Mad}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}}$$

Para estimar τ_{cierre} hay que evaluar la integral de la derecha, calcular I_3[2] y asumir valores razonables para M, d y a. Eso les queda de tarea a ustedes.

Para terminar, es interesante mencionar que el **período de oscilación del movimiento completo** (asumiendo que la puerta no se detiene en $\varphi = 0$) va a ser $\tau = 4\tau_{\text{cierre}}$ ya que $\varphi(0) = \pi/2$ corresponde a la cuarta parte de un ciclo completo.

[2] Si asuminos que la puerta es rectangular de lado $2d$ y altura h vale que $I_3 = \frac{2}{3}d^3h$ (desde el CM).