Guia 3. Problema 6

Un satélite de masa m se mueve en un potencial central atractivo, $V(r) = -k/r$. Súbitamente el valor de la constante k se reduce a la mitad. Encuentre la nueva órbita.

Problema de Kepler: V(r) = −k/r

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}, \qquad V_{eff} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{\ell}{\mu r^2} dt = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu r^4}{\ell^2}(E - V) - r^2}}$$

Integral para el problema de Kepler:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \cos^{-1}\left(-\frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right)$$

Problema de Kepler: V(r) = −k/r

$$r = \frac{B^2/A}{1 \pm e\cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{ep}{1 \pm e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

$$ep = \frac{l^2}{mk}$$

$$\begin{cases} e > 1,\ E > 0: & \text{Hipérbola} \\ e = 1,\ E = 0: & \text{Parábola} \\ e < 1,\ E < 0: & \text{Elipse} \\ e = 0,\ E = -|E_c|: & \text{Círculo} \end{cases}$$

Potencial efectivo:

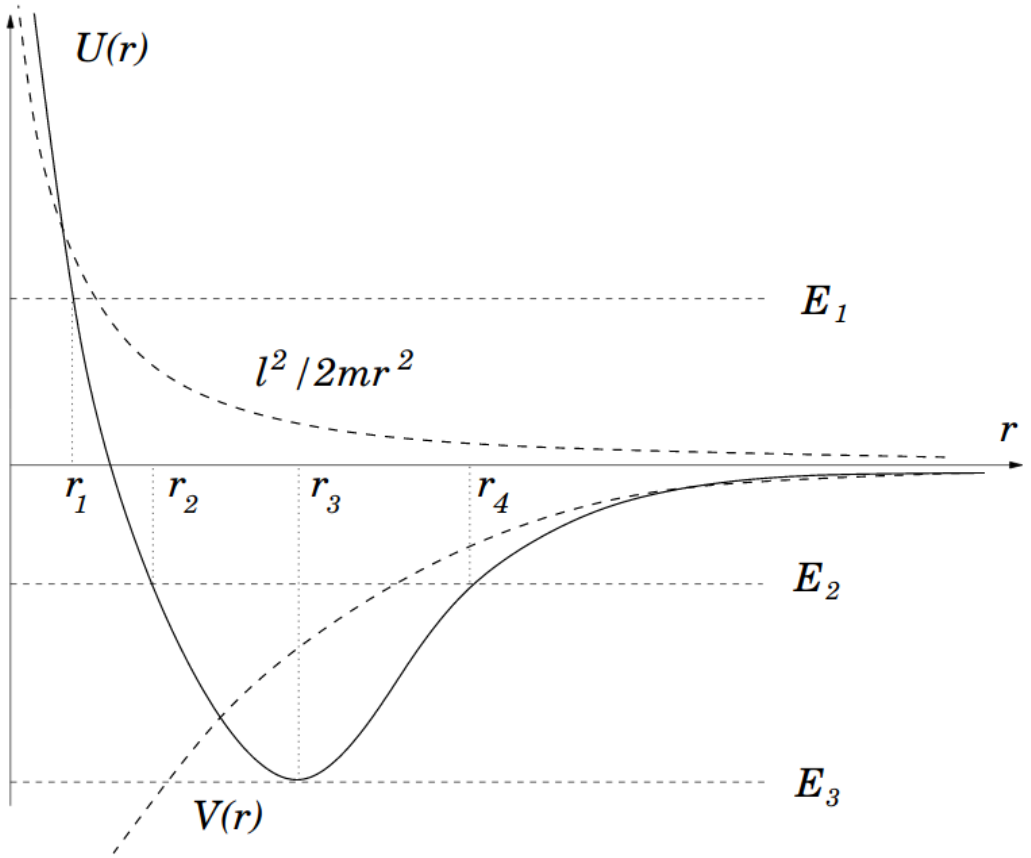

Figura 2.4: *El potencial efectivo $U(r)$ es la suma del potencial $V(r)$ y el término centrífuga $\ell^2/2mr^2$. El movimiento de una partícula en un potencial $V(r)$ está restingido a las zonas donde $E \geq V(r) + \ell^2/2mr^2$. Dependiendo de las condiciones iniciales, la partícula puede acercarse o alejarse más o menos al centro del potencial.*

Se reduce k a la mitad

$$V=\frac{-k}{\tilde{r}} \longrightarrow V=\frac{-k}{2\tilde{r}}$$

$$E=\frac{1}{2}m\dot{\tilde{r}}^2+\frac{l^2}{2m\tilde{r}^2}-\frac{k}{\tilde{r}}$$

Energía inicial

Aclaración: en el evento se conserva el impulso, la velocidad no varía por lo que $l=l'$

$$E'=E+\frac{k}{2\tilde{r}}$$

Energía final luego del evento
Aumenta

Con $l\neq 0$ ver que pasa para cada caso: E > 0, E = 0, E < 0, E = Ecirculo

Potencial efectivo:

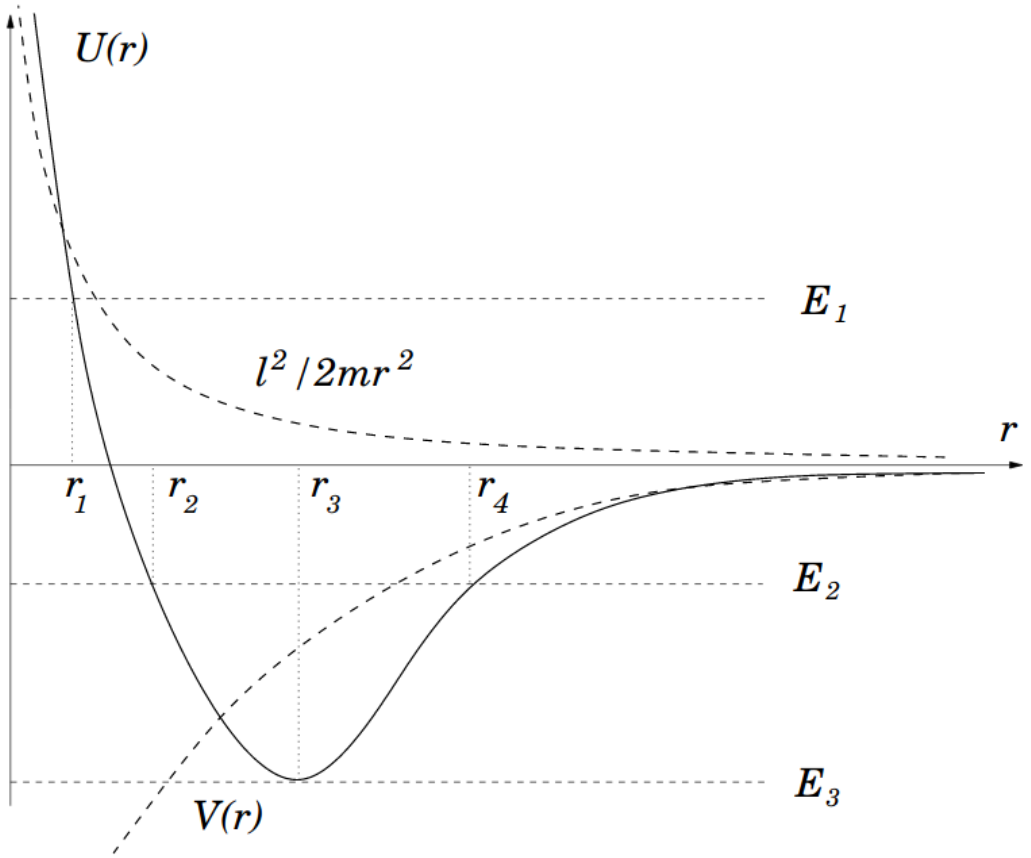

Figura 2.4: *El potencial efectivo $U(r)$ es la suma del potencial $V(r)$ y el término centrífuga $\ell^2/2mr^2$. El movimiento de una partícula en un potencial $V(r)$ está restingido a las zonas donde $E \geq V(r) + \ell^2/2mr^2$. Dependiendo de las condiciones iniciales, la partícula puede acercarse o alejarse más o menos al centro del potencial.*

Caso órbita elíptica: E < 0

Inicial: semiejes menor y mayor de la órbita elíptica

$$B = \frac{l}{\sqrt{2m[\![E]\!]}} \qquad A = \frac{k}{2[\![E]\!]} \qquad e = \sqrt{1 - \frac{2[\![E]\!]l^2}{mk^2}}$$

Luego del evento:

$$E' = E + \frac{k}{2\tilde{r}} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2E'l^2}{mk'^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\left(E + \frac{k}{2\tilde{r}}\right)l^2}{mk'^2}}$$

$$k' = \frac{k}{2}$$

Caso órbita circular: E= Ecírculo

Inicial: $\dot{\tilde{r}}=0$ $\tilde{r}=\frac{l^2}{mk}$ → $E=\frac{-k}{2\tilde{r}}$

Luego del evento: $E'=E+\frac{k}{2\tilde{r}}=0$

órbita parábolica: e = 1

$$r=\frac{\tilde{r}}{(1+\cos\theta)}$$

El aumento de energía es suficiente para que en el caso de menor energía haya un aumento de excentricidad tal que:

Órbita circular → Órbita parabólica