

Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2012 – Primer parcial (1/10/2012)

P1. (2.5 puntos) Dos partículas de masas m_1 y m_2 se mueven en un plano inclinado en un ángulo α con respecto a la vertical. Ambas masas están unidas por un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0 , como indica la figura (hay gravedad).

- Escriba el Lagrangiano y una de las ecuaciones de Lagrange.
- Encuentre las transformaciones infinitesimales que dejan invariante el Lagrangiano o la acción. Usando el Teorema de Nöether y halle las magnitudes conservadas.
- Si ahora se fija $\alpha = \pi/2$, ¿qué otras magnitudes se conservan?. Justifique.

P2. (1.5 puntos) Una partícula de masa m está sujeta a un campo uniforme que varía con el tiempo de modo que su Lagrangiano está dado por: $\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \alpha \sin(\omega t)x$. Suponga que se sabe experimentalmente que la partícula parte de $x = 0$ a un tiempo $t = 0$ y vuelve al mismo punto al cabo de un tiempo $\tau = \frac{\pi}{\omega}$.

- Usando la funcional $x = at^2 + bt + c$, encuentre una solución aproximada de la ecuación de movimiento usando el Principio variacional de Hamilton (halle a , b y c).
- Plantee y resuelva en forma exacta la ecuación de movimiento usando las condiciones del problema.
- Verifique la solución aproximada hallada en a) comparando el resultado exacto con el aproximado para la velocidad inicial y la máxima distancia de alejamiento. Haga un dibujo esquemático de la trayectoria en ambos casos.

Ayuda: $\int t \sin(\omega t) dt = -\frac{t \cos(\omega t)}{\omega} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2}$, $\int t^2 \sin(\omega t) dt = -\frac{(-2 + \omega^2 t^2) \cos(\omega t)}{\omega^3} + \frac{2t \sin(\omega t)}{\omega^2}$.

P3. (3 puntos) Una partícula de masa m y momento angular l se mueve sujeto a una fuerza central $F(r) = -(k/r^2) \exp(-r/a)$, con k y a positivas.

- Encuentre la ecuación que debe satisfacer el(los) radio(s) r_0 en una órbita circular.
- Muestre que la órbita circular es estable sólo si $r_0 < a$ (considere que la ecuación obtenida en a) posee solución).
- Considere una órbita cercana a la órbita circular, en el caso que $r_0 \ll a$. Definido el perihelio como el punto de mínimo acercamiento $r = r_0 - \delta r$. Muestre que sobre un ciclo radial de la órbita, el ángulo polar del perihelio avanza en $\pi r_0/a$. Desprecie variaciones en $\dot{\theta}$ de su valor constante de órbita circular.

P4. (3 puntos) El sistema de la figura está formado por tres masas, dos laterales m y una masa central M . Las masas se encuentran enhebradas en un aro vertical de radio a , y están unidas como indica la figura mediante dos resortes (enhebrados) de constante k y longitud natural l_0 .

- Elija un conjunto de coordenadas generalizadas y escriba el Lagrangiano.
- Si se miden los ángulos θ desde el centro del aro y con respecto a la vertical, ¿Cuanto vale θ_{20} de equilibrio? Calcule la constante k en función de los datos, para que la posición de equilibrio sea $\theta_{10} = \pi/2$ y $\theta_{30} = -\pi/2$.
- Escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones en un entorno de la configuración de equilibrio estable.
- Encuentre las frecuencias y los modos normales de oscilación y grafique cualitativamente el movimiento del sistema correspondiente a cada modo. *Ayuda* Puede usar simetrías y dejar expresadas dos soluciones en función de las raíces de una ecuación cuadrática.

