Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2020 – Primer parcial (19/10/2020)

(Justifique todas sus respuestas. Entregue los distintos problemas en hojas separadas. Ponga su nombre en todas las hojas. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto.)

P1. (2,5 puntos) Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre la supeficie interior de un toroide definida por

$$x = (a + b\cos\phi)\cos\theta \qquad y = (a + b\cos\phi)\sin\theta \qquad z = b\sin\phi$$

donde θ es el ángulo azimutal de las coordenadas cilíndricas y ϕ mide la posición angular en el círculo interior de radio b.

a) Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas los ángulos θ y ϕ. Determine las magnitudes conservadas a partir de las simetrías del problema (Teorema de Nöther).

b) Halle ecuación que determina el ϕ máximo y el ϕ mínimo para el caso en que las condiciones iniciales sean $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0)^2 = 2\frac{g}{a+b}$. Pruebe que $\phi = 0$ es solución de esta ecuación.

c) Halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles encontrando la velocidad de la partícula en tales órbitas en función del $\phi_0 < 0$ correspondiente a la órbita circular.

P2. (2,5 puntos) Considere un péndulo de masa m y longitud l. La solución de la ecuación de movimiento no se conoce (para amplitudes no pequeñas), pero por la forma del potencial, el movimiento es periódico y pasa por $\theta = 0$ cada medio período, por lo que se prueba con una expresión de la forma:

$$\theta(t) = a\sin\omega t + bt + c$$

a) Usar el principio de mínima acción entre los puntos inicial: $t_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ y final: $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$, $\theta_2 = 0$; para calcular el valor aproximado de la amplitud a en función de la frecuencia ω.

b) Alternativamente exprese la dependencia del período del movimiento τ con la amplitud aproximada a. Identifique la corrección a la fórmula usual del período del péndulo para pequeñas amplitudes.

c) Halle el cociente entre la velocidad inicial aproximada con la correspondiente exacta para una amplitud $a = 1$. Use $A \sim a$ para este cálculo, donde A es la amplitud exacta para una misma frecuencia ω.

Ayuda importante Para evaluar: $\int \cos[a\sin(\omega t)]dt$, haga uso de la siguiente expansión:

$$\cos[a\sin(\omega t)] \sim 1 - \frac{[a\sin(\omega t)]^2}{2} + \frac{[a\sin(\omega t)]^4}{24}$$

$$\text{Puede usar que:} \quad \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^4(\omega t)dt = \frac{3\pi}{8\omega}$$

P3. (2,5 puntos) Una partícula de masa m se mueve en el potencial central

$$V(r) = -\frac{k}{r^{2/3}}, \quad k \neq 0$$

a) Escriba el Lagrangiano y estudie el problema unidimensional equivalente justificando los pasos necesarios. Grafique el potencial efectivo (para $k > 0$ y $k < 0$). Discuta cualitativamente las trayectorias posibles.

b) Determine la condición necesaria para la existencia de órbitas circulares. Bajo esa condición, determine la energía y el período de la misma como función del momento angular. Analice su estabilidad.

c) Plantee los pasos necesarios para hallar $r(\varphi)$, dejando una expresión integral. Suponga ahora que $k < 0$ y que bajo ciertas condiciones $r(\varphi) = r_0 + c\varphi^2$, con $c > 0$ y $\varphi \geq 0$. Dibuje cualitativamente la trayectoria (plano $x - y$). ¿Coincide con lo analizado en a)? ¿Quién es r_0?

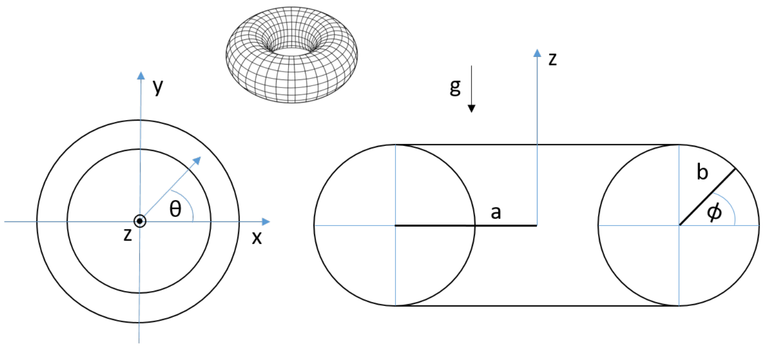
P4. (2,5 puntos) El sistema de la figura está formado por tres masas, dos de masa m unidas por un resorte de constante k y longitud natural l_0 enhebradas en una varilla horizontall lo mismo que el resorte. Ambas masas están unidas a una tercer masa M que cuelga de estas mediante resortes de constante k y longitud natural nula. El sistema se halla bajo gravedad.

a) Elija un conjunto de coordenadas generalizadas y escriba el Lagrangiano.

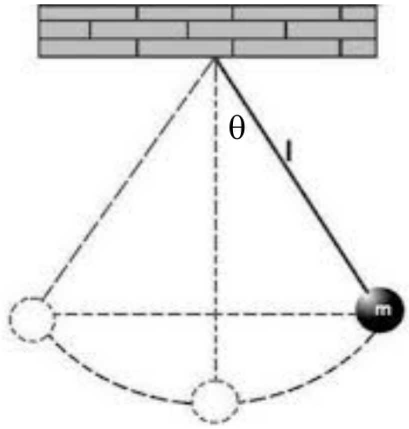
b) Determine las posiciones de equilibrio estable y escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones en un entorno de la configuración de equilibrio encontradas. Escriba las matrices de masa y de potencial. Se sugiere usar $\eta_4 = y_2 - y_{20}$ (y_2 coordenada vertical de la masa M).

c) Encuentre las frecuencias y los modos normales de oscilación y grafique cualitativamente el movimiento del sistema correspondiente a cada modo.

Problema 1



Problema 2



Problema 4