Guía 7 - Ejercicio 10

Ángulo Acción

Enunciado

10. Considere una partícula con hamiltoniano $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ para cada uno de los siguientes casos: $V(q) = -k^2/q + l^2/2mq^2$ y $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + l^2/2mq^2$.

    (a) Dibuje los diagramas de fases, escriba las ecuaciones de las curvas separatrices e indique las regiones que corresponden a movimientos de libración y rotación.

    (b) Para los movimientos de libración exprese a la variable de acción como función de la energía y halle la relación $\psi = \psi(q, J)$, donde ψ es la variable de ángulo. ¿Cómo es la frecuencia del movimiento?

    (c) Encuentre la energía de las trayectorias que satisfacen las relaciones $J = n\hbar$ y $l = p\hbar$ (con n, p números naturales y $\hbar$ constante). Discuta este punto con su docente.

Resolución

Inciso (a)

Lo primero que tenemos que hacer para describir los diagramas de fases es poder escribir al momento en función de la coordenada generalizada q. Para cualquier Hamiloniano de la forma

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{1}$$

se tiene que $\mathcal{H}$ no depende explícitamente del tiempo, por lo que se conserva. Por analogía de los potenciales con el oscilador armónico y Kepler, vamos a asumir que $E = \mathcal{H}$. Aporvechando esta conservación, podemos reescribir a $p(q)$ como se muestra a continuación

$$p(q) = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E - V(q)} \tag{2}$$

Vamos a mirar en detalle el primer potencial que nos proponen $V(q) = \frac{-k}{q} + \frac{l^2}{2mq^2}$ (el segundo queda como ejercicio, pero se resuelve de forma análoga). Lo primero que deberían ser capaces de notar es el paralelismo entre este potencial y el potencial Kepleriano. En principio, no sabemos a qué magnitud corresponde la variable q junto con los parámetros k y l, por lo que no podemos asumir que se trata de un problema de fuerzas centrales. Sin embargo, todos los resultados que ya conocemos van a aplicar para este Hamiltoneano. Ya conocemos la forma de este potencial: tiene un mínimo global en $q = \frac{l^2}{2mk^2}$ (se consigue pidiendo que $\frac{\partial V(q)}{\partial q}\Big|_{q=0} = 0$) y presenta movimiento acotado siempre que $E < 0$. Luego, siempre que la energía sea negativa, el diagrama de fases presentará una forma de órbitas cerradas. La curva definida por $E = 0$ marca la bifurcación entre el movimiento acotado (órbitas cerradas en el espacio de fases) y el no acotado (no hay órbitas cerradas), es por esto que **ésta curva es la separatriz del sistema**. Por lo tanto, la región correspondiente al interior de la separatriz se corresponde con un movimiento de libración (órbitas cerradas en el espacio de fases). Por fuera de la separatriz, el movimiento no es periódico en alguna coordenada, así que tampoco hay rotación. En la figura 1 se presenta el diagrama.

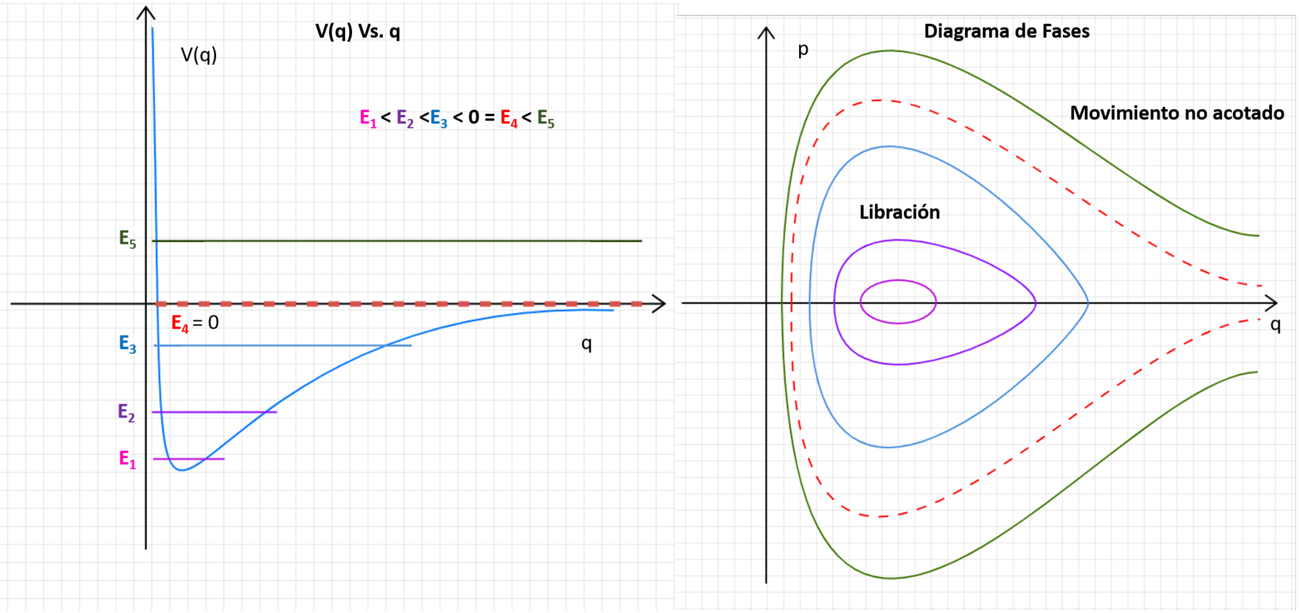

Figura 1: A la izquierda, el potencial V(q) en función de q, con distintos niveles de energía marcados. A la derecha, el diagrama de fases correspondiente (los colores de las curvas coinciden con los de las energías correspondientes)

Observaciones

A la hora de dibujar el diagrama de fases, es posible obtener una intuición acerca de la *forma* que va a tener el mismo. Lo más importante es darse cuenta de la existencia de órbitas y/o periodicidad (recuerden que sin órbitas cerradas, no vamos a trabajar con las variables de Ángulo - Acción). En este caso, como el potencial tiene un mínimo, **sabemos** que va a existir alguna región para energías cercanas al mínimo donde el Hamiltoneano pueda aproximarse por el de un oscilador armónico

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\Big|_{q=q_{eq}} (q - q_{eq})^2 \tag{3}$$

Fíjense que cualquier hamiltoneano que posea esta forma describe órbitas elípticas en su diagrama de fases (como $V(q_{eq})$ es un mínimo, nos garantizamos de que $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}|_{q_{eq}} > 0$).

A medida que incrementamos la energía, podemos ver del gráfico del potencial en la figura 1 que la energía cinética (es decir, p^2) tiende a cero de forma mucho más abrupta cuando $q \to q_-$ que cuando $q \to q_+$ (donde q_- es el punto de retorno más cercano a cero, y q_+ el más alejado del origen). Este efecto aumenta a medida que incremento la energía por lo que es de esperar un ***achatamiento*** de la órbita en el espacio de fases en su lado más cercano al origen. Por último, una vez que $E > 0$ siempre vamos a tener un punto de retorno q_- dado que el potencial diverge en el origen, pero desaparece el punto q_+, razón por la cual las curvas en el espacio de fases dejan de cerrarse.

Observen que la curva que describe la separatriz no es más que tomar la ecuación 2 e igualar $E = 0$. En este caso, la separatriz $p_s(q_s)$ se define como

$$p_s = \pm\sqrt{2m}\sqrt{\frac{k}{q_s} - \frac{l^2}{2mq_s^2}} \tag{4}$$

Inciso (b)

Nos piden encontrar la variable acción en función de la energía. Partiendo de la definición, tenemos que para $V(q) = -\frac{k}{q} + \frac{l^2}{2mq^2}$ la acción toma la forma

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{2m}\sqrt{E + \frac{k}{q} - \frac{l^2}{2mq^2}}dq = \frac{\sqrt{2m}}{\pi}\int_{q_-}^{q_+} \sqrt{E + \frac{k}{q} - \frac{l^2}{2mq^2}}dq \tag{5}$$

donde $\{q_-, q_+\}$ son los puntos de retorno. Es **muy** importante notar y entender que en los puntos de retorno se satisface la siguiente igualdad

$$E + \frac{k}{q_\pm} - \frac{l^2}{2mq_\pm^2} = 0 \tag{6}$$

Esta relación nos va a ser últil al momento de evaluar las integrales que tenemos que hacer (sí, hay más de una). Vamos entonces a resolver esta integral, que en principio no es nada trivial (en la página 468 del Goldstein - 3º edición, resuelven el problema de Kepler usando variables de ángulo-acción, pero al momento de resolver esta integral, usan un método más ***elegante*** en el que pasan la integral al plano complejo. No va a ser la última vez que vean un approach así en la carrera, así que para aquellos interesados o curiosos, sepan que ahí tienen otra alternativa para mirar. En esta clase, vamos a resolverlo de una forma más elemental).

Empezamos por notar que cualquier raíz se puede reescribir como $\surd = (\surd)^2/\surd$. Reescribimos entonces la ecuación 5

$$J = \frac{\sqrt{2m}}{\pi}\int_{q_-}^{q_+} \frac{E + \frac{k}{q} - \frac{l^2}{2mq^2}}{\sqrt{E + \frac{k}{q} - \frac{l^2}{2mq^2}}}dq \tag{7}$$

Y ahora la separamos en las siguientes 3 integrales

$$J = \frac{\sqrt{2m}}{\pi}\left(\int_{q_-}^{q_+} \frac{E+\frac{k}{2q}}{\sqrt{E+\frac{k}{q}-\frac{l^2}{2mq^2}}}dq + \int_{q_-}^{q_+} \frac{\frac{k}{2q}}{\sqrt{E+\frac{k}{q}-\frac{l^2}{2mq^2}}}dq - \int_{q_-}^{q_+} \frac{\frac{l^2}{2mq^2}}{\sqrt{E+\frac{k}{q}-\frac{l^2}{2mq^2}}}dq\right) \tag{8}$$

Vamos a empezar por la primera

$$\int_{q_-}^{q_+} \frac{E+\frac{k}{2q}}{\sqrt{E+\frac{k}{q}-\frac{l^2}{2mq^2}}}dq = \int_{q_-}^{q_+} \frac{1}{2}\frac{2Eq+k}{\sqrt{Eq^2+qk-\frac{l^2}{2m}}}dq \tag{9}$$

Notamos que la reescribimos de forma tal que se pueda expresar como $\int f'/\sqrt{f}dt$ donde la función es un polinomio de grado dos $f(q) = Eq^2 + kq - \frac{l^2}{2m}$. No hace falta entonces hacer ninguna cuenta más. El resultado es el siguiente

$$\left.\sqrt{Eq^2+kq-\frac{l^2}{2m}}\right|_{q_-}^{q_+} \tag{10}$$

Si recordamos la relación 6, el argumento se la raíz se anula en ambos puntos de retorno, por lo que el resultado es cero.

Vamos con la segunda integral. Nuevamente, vamos a reescribirla de forma conveniente

$$\int_{q_-}^{q_+} \frac{\frac{k}{2q}}{\sqrt{E+\frac{k}{q}-\frac{l^2}{2mq^2}}}dq = \frac{k}{2}\int_{q_-}^{q_+} \frac{1}{\sqrt{Eq^2+kq-\frac{l^2}{2m}}}dq = \frac{k}{2}\int_{q_-}^{q_+} \frac{1}{\sqrt{-|E|q^2+kq-\frac{l^2}{2m}}}dq \tag{11}$$

Antes de seguir, explico un poco que quiero hacer con esta última expresión. Lo que hice fue recalcar que la energía tiene un valor negativo (puesto que, como ya explicamos, estamos trabajando en movimiento de libración, y para este potencial, éste solo se da si la energía es negativa). ¿Por qué es conveniente avivarse de esto? Básicamente, quiero poder llevar la integral a una expresión de este tipo, cuyo resultado ya conocemos (ver tablas)

$$\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-(x\pm\beta)^2}}dx = arcsen\left(\frac{x\pm\beta}{\alpha}\right) \tag{12}$$

Por eso es importante notar que el coeficiente que acompaña q^2 es negativo. De otra forma, no sería posible llegar a esta expresión (en realidad se puede, pero van a tener números imaginarios que van a llevar sus soluciones trigonométricas a hiperbólicas). Dicho esto, seguimos reescribiendo la integral

$$\frac{k}{2}\int_{q_-}^{q_+} \frac{1}{\sqrt{-|E|q^2+kq-\frac{l^2}{2m}}}dq = \frac{k}{2}\int_{q_-}^{q_+} \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2}{4|E|}-\frac{l^2}{2m}-(\sqrt{|E|}q-\frac{k}{2\sqrt{|E|}})^2}}dq \tag{13}$$

Efectuando el cambio de variable $x = \sqrt{|E|}q$ llegamos a la expresion 12, y nuestro resultado queda

$$\frac{k}{2\sqrt{|E|}} arcsen\left(\frac{\sqrt{|E|}q - \frac{k}{2\sqrt{|E|}}}{\sqrt{\frac{k^2}{4|E|} - \frac{l^2}{2m}}}\right)\Bigg|_{q_-}^{q_+} \tag{14}$$

Parece que quedo algo bastante complicado de evaluar, sin embargo, no debería serlo si recordamos nuevamente la ecuación 6. Dicha condición se puede reexpresar de la siguiente manera

$$\pm\sqrt{\frac{k^2}{4|E|} - \frac{l^2}{2m}} = \left|\sqrt{|E|}q_\pm - \frac{k}{2\sqrt{|E|}}\right| \tag{15}$$

Lo que quiere decir que nuestro resultado es

$$2 \cdot \frac{k}{2\sqrt{|E|}} arcsen(1) = \frac{k\pi}{2\sqrt{|E|}} \tag{16}$$

¡Ya casi terminamos! Nos queda una última integral que otra vez vamos a reescribir

$$-\int_{q_-}^{q_+} \frac{\frac{l^2}{2mq^2}}{\sqrt{E + \frac{k}{q} - \frac{l^2}{2mq^2}}} dq = -\frac{l^2}{2m}\int_{q_-}^{q_+} \frac{1/q^2}{\sqrt{E + \frac{k}{q} - \frac{l^2}{2mq^2}}} dq \tag{17}$$

Se puede nuevamente llevar la integral a la expresión 12. En este caso, conviene usar el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{q} \\ dx &= -\frac{1}{q^2} dq \end{aligned} \tag{18}$$

Con ese cambio y un par de arreglos más obtenemos

$$\frac{l^2}{2m}\int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{\sqrt{E + kx - \frac{l^2}{2m}x^2}} dx = \frac{l^2}{2m}\int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{\sqrt{E + \frac{mk^2}{2} - (\frac{l}{\sqrt{2m}}x - k\sqrt{\frac{m}{2}})^2}} dx \tag{19}$$

Siguiendo un procedimiento al caso anterior, pueden chequear que el resultado es

$$-\frac{l\pi}{\sqrt{2m}} \tag{20}$$

Escribimos entonces a la variable acción en función de los resultados obtenidos

$$J = -l + k\sqrt{\frac{m}{-2E}} \tag{21}$$

Y por lo tanto, la expresión de la energía en función de la acción

$$E = -\frac{k^2 m}{2(J+l)^2} \tag{22}$$

Ya encontramos la variable acción, sólo nos queda encontrar la variable ángulo. Para ello, podemos pensar al cambio de variables ángulo-acción como una transformación canónica usando la función característica de Hamilton (W). Para refrescar un poco, recordemos que la transformación canónica de Hamilton-Jacobi era tal que el nuevo Hamiltoneano era nulo

$$H\left(q, \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q}\right) + \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t} = K(Q,P) \equiv 0 \tag{23}$$

En un sistema conservativo (como en el que nos encontramos), la función principal de Hamilton (S) puede separar en un término temporal y otro que depende de las variables

$$S(q,E,t) = W(q,E) - Et \tag{24}$$

En sistemas de este tipo, es posible efectuar una transformación canónica usando solo $W(q,E)$ como función generatriz de tipo 2. En este caso, sucede que

$$H\left(q, \frac{\partial W(q,E)}{\partial q}\right) = E = K(Q,E) \tag{25}$$

Y por lo tanto, se puede obtener la variable Q derivando

$$\frac{\partial W(q,E)}{\partial E} = Q(q,E) \tag{26}$$

Ahora bien, todo esto explicado recién se obtiene si usamos como nuevo momento (P) a la energía (E). Sucede que lo que querríamos usar es la variable acción (J), por lo que nuestra función generatriz tiene en realidad una pinta de tipo $W(q,E(J))$. De esta forma, la variable ángulo se obtiene aplicando la regla de la cadena a la ecuación 26.

$$\omega(q,J) = \frac{\partial W(q,E(J))}{\partial E}\frac{\partial E(J)}{\partial J} \tag{27}$$

¿Pero conocemos a W(q,E)? La respuesta es que, en principio, sólo conocemos su derivada

$$\frac{\partial W(q,E)}{\partial q} = p = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E + \frac{k}{q} - \frac{l^2}{2mq^2}} \tag{28}$$

Uno estaría tentado a integrar esta expresión como ya lo hicimos. Sin embargo, dicha integral estaba evaluada en puntos estratégicos ($q_\pm$) de forma tal que la expresión **difícil** que nos quedaba era manejable. Ahora, la integral está indefinida (se hace hasta un punto arbitrario de q), razón por la cuál la operación se complica. De hecho, en este caso particular la expresión para la variable ángulo es bastante difícil de obtener, pero como regla general se puede efectuar siempre la ecuacion 27.

En cuanto al período de movimiento, tenemos que

$$\tau(E) = \int_0^{\tau(E)} dt = \oint \frac{dq}{\dot{q}} = \oint \frac{dq}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} = \oint \frac{\partial p}{\partial \mathcal{H}} dq = \frac{d}{dE}\oint p\,dq = 2\pi\frac{dJ}{dE} \tag{29}$$

Por lo tanto, el período nos queda

$$\tau = 2\pi k\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \tag{30}$$

Inciso (c)

Lo último que nos piden es encontrar las energías de trayectorias que satisfacen las relaciones $J = n\hbar$ y $l = p\hbar$. De la expresión 22 se obtiene fácilmente

$$E = -\frac{k^2 m}{2\hbar^2(n+p)^2} \tag{31}$$

Resulta que en los comienzos de 1900, surgieron los primeros intentos de ***cuantizar*** la física. La mecánica cuántica aún no había sido desarrollada pero se comenzaba a fabricar herramientas que permitían comprender fenómenos que la teoría clásica no explicaba. Entre ellas, la más importante fue la **cuantización de Bohr-Sommerfield**. Básicamente, lo que hacía esta cuantización era tomar un conjunto discreto de estados de un movimiento clásico como estados permitidos. La idea entonces es que el sistema obedece a la mecánica clásica pero no puede estar en cualquiera de los estados posibles (dentro de un rango continuo), sino que sólo puede encontrarse en algún estado dentro de un conjunto discreto que obedezca a la siguiente relación

$$\frac{1}{2\pi}\oint pdq = n\hbar \tag{32}$$

Con p el momento del sistema, n un número entero (posteriormente llamado número cuántico) y $\hbar$ la constante de Plank reducida. Lo que se estaba haciendo era cuantizar la acción de forma tal que su unidad de medida fuese la constante de Plank (por esta razón, se la conoce también como *cuanto de acción*).

El modelo del Átomo de Bohr recurrió a la cuantización del momento angular ($l = p\hbar$) para poder explicar que las órbitas de los electrones en los átomos eran estables. Describía a un átomo como un pequeño sistema planetario, donde el electrón giraba en torno al núcleo en una órbita circular estable. Era importante el postulado de que en estas órbitas, los electrones no irradiaban energía, razón por la cual sus órbitas no decaían hasta colapsar con el núcleo. Además, predecía la emisión de energía correspondiente a frecuencias determinadas (espectro de emisión de atómos) cuando los electrones saltaban de una órbita a otra. Este modelo funcionaba bien para el átomo de hidrógeno, pero tenía sus fallas cuando trataba de explicar fenómenos de átomos más complejos. Una de las fallas era que el único número cuántico del que dependía la energía era aquel vinculado con el momento angular. Más adelante, Sommerfield perfeccionó este modelo dándole libertad a las órbitas para que fueran levemente elípticas. Así, la energía pasaba a depender tanto del momento angular como del momento radial. Lo que vemos en este ejercicio es justamente una cuantización del momento angular y radial que define las energías posibles.