Ejercicios 18 Guía 5

Autor: Vladimir D. Rodríguez Chariarse

1. Breve introducción teórica

Este problema es conveniente tratarlo como una rotación pura alrededor del soporte. Posee los tres grados de libertad rotacionales descriptos por los ángulos de Euler. Un problema análogo mas realista en cuanto al soporte ha sido dado de tarea para resolverlo con el formalismo Lagrangiano. Aquí se busca resolver el problema con las ecuaciones de Euler, que son las ecuaciones de Newton para el momento angular, pero expresada en un sistema móvil, usualmente fijo al cuerpo.

No re-derivaremos las ecuaciones de Euler, pero si la expresaremos en la forma:

$$\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{m\acute{o}vil} + \omega \times \mathbf{L} = \tau \tag{1}$$

Donde ω es la velocidad angular del sistema no inercial considerado (usualmente $\omega = \mathbf{\Omega}$).

La razón de usar un sistema fijo al cuerpo es mantener los momentos de inercia constantes y además diagonales por la elección de ejes principales. Esto no es necesario si el cuerpo posee un eje de simetría de orden 3. En este caso hay degeneración y cualquier par de ejes ortogonales entre sí y en el plano perpendicular al eje de simetría son ejes principales de inercia. Por eso ponemos en general ω.

Esto ayuda a simplificar las cuentas pues podemos elegir ejes que sigan al cuerpo rígido aunque no necesariamente hagan todo el movimiento del mismo

2. Solución del Problema 18

Elegimos al eje de simetría como eje $\hat{3}$, la novedad es que elegimos como eje $\hat{1}'$ al eje de nodos y como eje $\hat{2}' = \hat{3} \times \hat{1}'$. Usamos la notación primada para indicar que estos ejes no se mueven solidarios al cuerpo (de hecho rotan con velocidad $-\dot{\psi}$ con respecta al eje $\hat{3}$ visto desde el sistema fijo al cuerpo). Sin embargo, la simetría dice que el tensor de inercia permanece constante y diagonal:

$$I_{1'} = I_{2'} = I = \frac{Ma^2}{4} + md^2 \qquad I_3 = \frac{Ma^2}{2}$$

Estos momentos de inercia son calculados con respecto al soporte por lo que vale:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{\Omega}$$

Usando la expresión de la velocidad angular Ω en función de los ángulos de Euler y sus derivadas:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\psi}\hat{3}$$

como $\hat{z} = \cos\theta\hat{3} + \sin\theta\hat{2}'$ y $\hat{n} = \hat{1}'$

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\theta}\hat{1}' + \dot{\phi}\sin\theta\hat{2}' + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{3}$$

de donde se obtiene:

$$\mathbf{L} = I\dot{\theta}\hat{1}' + I\dot{\phi}\sin\theta\hat{2}' + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{3}$$

El sistema móvil considerado es el formado por los ejes $\hat{1}', \hat{2}', \hat{3}$, cuya velocidad angular es la del cuerpo pero sin $\dot{\psi}$ (no tiene la última rotación):

$$\omega = \dot{\theta}\hat{1}' + \dot{\phi}\sin\theta\hat{2}' + \dot{\phi}\cos\theta\hat{3}$$

Las ecuaciones de Euler en este caso se escriben:

$$\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{móvil} + \omega \times \mathbf{L} = \tau$$

Por consiguiente

$$\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{móvil} = I\ddot{\theta}\hat{1}' + I(\ddot{\phi}\sin\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{2}' + I_3\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{3}$$

Calculemos $\omega \times \mathbf{L}$ linealizado en las pequeñas magnitudes. Notemos primero primero que ω ya es lineal en las pequeñas magnitudes ($\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$), por lo que tomaremos de $\mathbf{L}$ sólo magnitudes no pequeñas, $\mathbf{L} \sim I_3\dot{\psi}\hat{3}$

$$\omega \times \mathbf{L} \sim -I_3\dot{\psi}\dot{\theta}\hat{2}' + I_3\dot{\psi}\dot{\phi}\sin(\theta_0)\hat{1}'$$

Finalmente calculamos el torque linealizado, considerando m una magnitud pequeña:

$$\tau = d\hat{3} \times (-mg\hat{z}) \sim mgd\sin\theta_0\hat{1}'$$

reemplazando en la ecuación de Euler se obtienen las tres ecuaciones:

Componente $\hat{3}$:

$$I_3\frac{d}{dt}(\dot{\psi} \hat{+} \dot{\phi}\cos\theta) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\psi} \hat{+} \dot{\phi}\cos\theta = \Omega_0 \tag{2}$$

Componente $\hat{1}'$:

$$I\ddot{\theta} + I_3\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\theta_0 = mgd\sin\theta_0 \tag{3}$$

Componente $\hat{2}'$:

$$I\ddot{\phi}\sin\theta_0 - I_3\Omega_0\dot{\theta} = 0 \tag{4}$$

De (2) en (3) y (4), linealizando :

$$I\ddot{\theta} + I_3\Omega_0\dot{\phi}\sin\theta_0 = mgd\sin\theta_0 \tag{5}$$

$$I\ddot{\phi}\sin\theta_0 - I_3\Omega_0\dot{\theta} = 0 \tag{6}$$

efectuando (5) - i(6) y definiendo $\lambda = \theta - i\phi\sin\theta_0$

$$I\ddot{\lambda} + iI_3\Omega_0\dot{\lambda} = mgd\sin\theta_0 \tag{7}$$

Como es usual en este tipo de ecuaciones la solución se escribe como suma de soluciones de la ecuación homogénea (λ_h) y de la solución particular (λ_p). Considerando $\ddot{\lambda} = 0$ obtenemos λ_p:

$$\lambda_p = -i\omega_p\sin\theta_0 t + C \qquad \omega_p = \frac{mgd}{I_3\Omega_0} \tag{8}$$

donde identificamos la velocidad angular de precesión del trompo simétrico pesado $\omega_p = \frac{mgd}{\Omega_0 I_3}$.

La solución de la homogénea la obtenemos como es usual proponiendo

$$\lambda_h = \lambda_0 e^{-i\omega_L t} \qquad \omega_L = \frac{I_3\Omega_0}{I} \tag{9}$$

donde identificamos la velocidad angular de precesión del trompo simétrico libre $\omega_L = \frac{I_3\Omega_0}{I}$.

Sumando las soluciones:

$$\lambda = --i\omega_p\sin\theta_0 t + ae^{-i\varphi_0}\sin\theta_0 e^{-i\omega_L t} + c - id\sin\theta_0 = \theta - i\phi\sin\theta_0 \tag{10}$$

donde se redefinieron las constantes complejas: $\lambda_0 = ae^{-i\varphi_0}\sin\theta_0$ y $C = c - id\sin\theta_0$.

Igualando las partes real e imaginaria obtenemos:

$$\theta = c + a\sin\theta_0\cos(\omega_L t + \varphi_0) \tag{11}$$

$$\phi = \omega_p t + a\sin(\omega_L t + \varphi_0) + d \tag{12}$$

Usando las condiciones iniciales:

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad \phi(0) = 0 \quad \dot{\phi}(0) = \omega_0$$

obtenemos las soluciones:

$$\theta = \theta_0 + \frac{(\omega_p - \omega_0)}{\omega_L}\sin\theta_0(1 - \cos(\omega_L t))$$

(13)

$$\phi = \omega_p t - \frac{(\omega_p - \omega_0)}{\omega_L}\sin\omega_l t \tag{14}$$

Observaciones

- El signo de $\omega_p - \omega_0$ determina si inicialmente sube o baja el giróscopo.
- Si $\omega_p = \omega_0$ no hay nutación (cabeceo).
- Si Ω_0 es grande, ω_L, frecuencia de nutación es también grande y la amplitud de la nutación se hace pequeña. La nutación se nota por el zumbido del giróscopo (trompo).

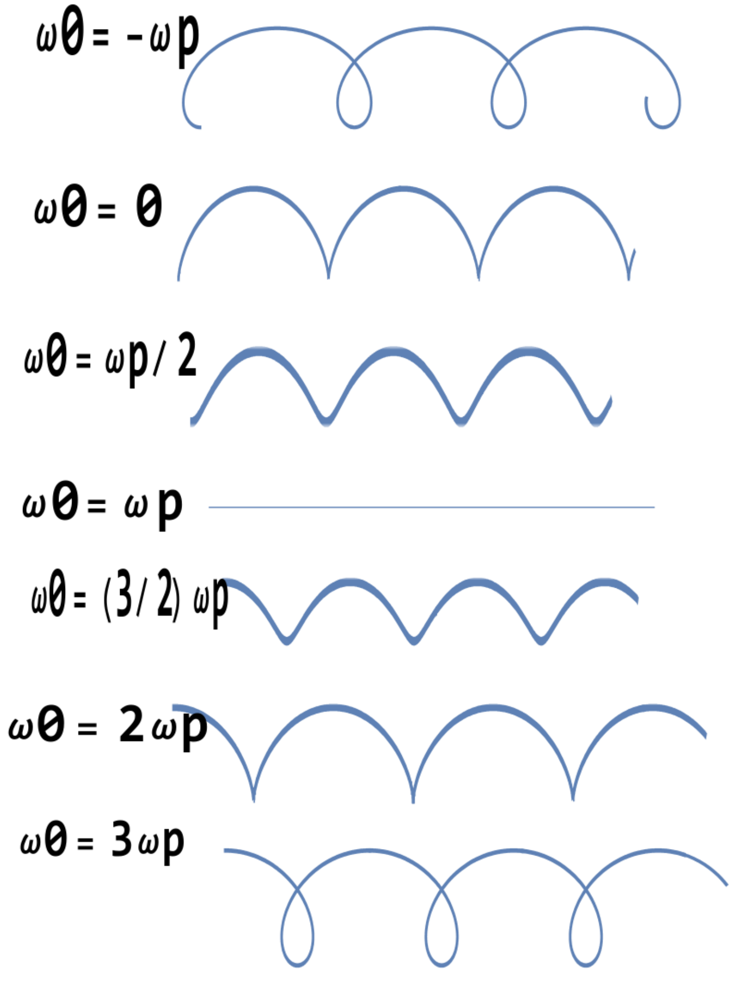

Figura 1: *Curvas paramétricas θ (vertical) vs ϕ (horizontal), para distintos valores de ω_0 en término de ω_p.*