# Guia6-Ejercicio3

Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: r = r(t), donde r(t) es una función conocida.

$r(t)=r_o+at$ (Por ejemplo podría tratarse de una expansión)

Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano igual a la energía total?

# Pasos

1) Coordendas generalizadas, vínculos.

2) Lagraniano

3) Hamiltoniano

4) Ecuaciones canónicas

5) Conservaciones

# $L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, t)$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 sen^2(\theta)\right)$$

$$V = m\,g\,r\cos(\theta)$$

$$r = r(t)$$

***r(t)*** es una función conocida, es un ***vínculo***. No es una coordenada generalizada del problema.

$$L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, t)$$

Depende explícitamente del tiempo por r(t), ***h*** no se conserva

$$L(\theta,\phi,\dot{\theta},\dot{\phi},t) \longrightarrow H(\theta,\phi,p_\theta,p_\phi,t)$$

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}(t)^2+r(t)^2\dot{\theta}^2+r(t)^2\dot{\phi}^2 sen^2(\theta))-m g r(t)\cos(\theta)$$

Momentos conjugados

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=m r(t)^2\dot{\theta} \qquad p_\phi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=m r(t)^2\dot{\phi} sen^2(\theta)$$

$$H=p_\theta\dot{\theta}+p_\phi\dot{\phi}-L=-\frac{m}{2}\dot{r}(t)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{p_\theta^2}{r(t)^2}+\frac{p_\phi^2}{r(t)^2 sen^2(\theta)}\right)+mgr(t)\cos(\theta)$$

# H y ecuaciones canónicas

$$\boxed{H=-\frac{m}{2}\dot{r}(t)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{p_\theta^2}{r(t)^2}+\frac{p_\phi^2}{r(t)^2 sen^2(\theta)}\right)+mgr(t)\cos(\theta)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{p}_\phi=\frac{-\partial H}{\partial \phi}=0 \longrightarrow p_\phi=L_z \\ \dot{\phi}=\frac{\partial H}{\partial p_\phi}=\frac{Lz}{mr(t)^2 sen^2(\theta)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{p}_\theta=\frac{-\partial H}{\partial \theta}=\frac{L_z^2\cos(\theta)}{m\,r(t)^2 sen^3(\theta)}-mgr(t)sen(\theta) \\ \dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr(t)^2} \end{array}\right.$$

$$\theta=\theta(r(t),\dot{r}(t))$$

$$\phi=\phi(r(t),\dot{r}(t))$$

# ¿Conservación de energía?

$H(\theta,\phi,p_\theta,p_\phi,t)$

Depende explícitamente del tiempo por r(t),

***h*** no se conserva

$¿E=H?$

$$H=-\frac{m}{2}\dot{r}(t)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{p_\theta^2}{r(t)^2}+\frac{p_\phi^2}{r(t)^2 sen^2(\theta)}\right)+mgr(t)\cos(\theta)$$

$$E=T+V=H+m\dot{r}(t)^2$$

H y E diferen con un signo, esto es porque se está haciendo un trabajo sobre el sistema.

¿Por qué H y E no son iguales? ¿Como es T respecto a las velocidades generalizadas?

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\phi}^2 sen^2(\theta)\right) \qquad r=r(t)$$

$$T(q,\alpha\dot{q},t)=\alpha^2 T(q,\dot{q},t)$$

No cumple

No es una función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas porque r no es una coordenada generalizada. Es un vínculo del sistema que nos habla del trabajo externo que se realiza sobre el sistema.

# Ejercicio extra

Un péndulo en el plano bajo gravedad, inicialmente el hilo tiene largo Lo, a medida que oscila se acorta el hilo con una taza temporal $\alpha$.

Es decir: $L(t) = Lo - \alpha t$

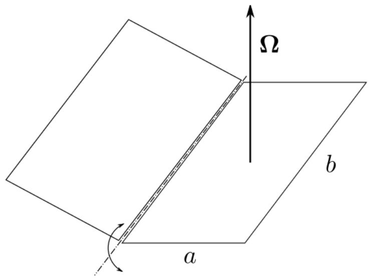
Obtenga el hamiltoniano y la energía.

Justifique por qué difieren, si se conservan o no.

Puede darse el caso que H = E para un sistema de coordenadas generalizadas pero no se conserven porque dependen explicitamente del tiempo. Ver Goldstein 8.2

Puede darse el caso que H se conserve porque no depende explicitamente del tiempo, pero no sea igual a E. (Guia 5 - ejercicio 8) .

En este ejercicio se debe a que la energía cinética no es función cuadrática homogenea de las velocidades generalizadas.




Qué E se conserve, implica que H = E y que H no dependa explicitamente del tiempo.