Ejercicios 9 Guía 6

Autor: Vladimir D. Rodríguez Chariarse

1. Breve introducción teórica

Las transformaciones canónicas proveen una gran variedad de formas de describir un mismo problema. En cierto modo esta multiplicidad es en el formalismo Hamiltoniano algo así como el cuadrado de la multiplicidad del caso Lagrangiano donde sólo se admitía las llamadas transformaciones puntuales $Q(q, p, t)$ dado que las velocidades no son independientes en este formalismo. En el formalismo Hamiltoniano, coordenadas y momentos son variables independientes y podemos pensar en transformar cada uno por separado: $Q(q, p, t)$ y $P(q, p, t)$. No todas las transformaciones satisfacen las ecuaciones canónicas (de Hamilton) A las transformaciones que tienen una dinámica que deriva de ecuaciones de Hamilton (preservan las forma de las ecuaciones de movimiento) se les llama Transformaciones Canónicas.

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p} \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial q} \end{aligned} \tag{1}$$

donde K es el nuevo Hamiltoniano resultado de la transformación.

Para encontrar la condición que deben cumplir las transformaciones para ser canónicas se usa el hecho que las ecuaciones de Hamilton salen del principio variacional que minimiza la acción S, variando las coordenadas y los momentos en forma independiente, con extremos fijos. Recordando que $H = \dot{q}p - \mathcal{L}$, el principio variacional demanda:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_1^2 (pdq - Hdt) \\ &= \int_1^2 [\delta p dq + dp\delta q - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p dt] \\ &= \int_1^2 [\delta p \underbrace{(dq - \frac{\partial H}{\partial p}dt)}_{0} + \delta q \underbrace{(-dp - \frac{\partial H}{\partial q}dt)}_{0}] + \underbrace{p\delta q \Big|_1^2}_{0} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

donde se usó una integral por partes puesto que $p\delta(dq) = d(p\delta q) - \delta pd$. La anulación de los factores que acompañan δp y δq constituyen las ecuaciones de Hamilton en las variables originales q, p.

Para obtenerla misma forma de las ecuaciones en las variables nuevas Q, P (con el Hamiltoniano K) queda claro que se debe usar el principio de mínima acción:

$$\delta \int_1^2 (PdQ - Kdt)$$

Ambas ecuaciones son compatibles si los integrandos difieren en una derivada total con respecto al tiempo de una función F de coordenadas, impulsos y tiempo. En este caso las variaciones de la acción serán iguales pues difieren en la variación de F en los extremos fijos, que es nula.

$$dF = pdq - PdQ + (K - H)dt \tag{3}$$

podemos desarrollar el $dF = dF_1(q, Q, t)$ e identificar:

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q}, \qquad P = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q}, \qquad K = H + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}; \tag{4}$$

A la función $F_1(q, Q, t)$ se le llama función generatriz de la transformación canónica del tipo 1.

Se pueden hacer transformaciones de Legendre para obtener otras formas funcionales F, por ejemplo la que saca dQ de (3) y pone dP en su lugar

$$d\left(F_1(q, Q, t) + QP\right) = pdq - QdP + (K - H)dt = dF_2(q, P, t) \tag{5}$$

cuyas ecuaciones de transformación son:

$$p = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q}, \qquad Q = -\frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P}, \qquad K = H + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t}; \tag{6}$$

La relación entre los Hamiltonianos no cambia. En (5) podemos sacar dq y poner dp

$$d\left(F_1(q, Q, t) + QP + qp\right) = pdq - QdP + (K - H)dt = dF_4(p, P, t) \tag{7}$$

Encontrar las relaciones para $F_3(q, P)$ quedan como ejercicio (para ello es mejor volver a (3)).

Una primera forma de demostrar que una transformación es canónica es encontrar una función generatriz F_n. No todas las transformaciones canónicas tienen todas las F_n, pero sí al menos una de ellas. Por ejemplo, la transformación identidad: $Q = q$, $P = p$, posee función generatriz $F_2(q, P) = qP$ pero no posee $F_1(q, Q)$ (la cuenta da cero). La forma de encontrar una función generatriz F_n dada, es resolviendo las ecuaciones en derivada parciales que dan la correspondiente transformación. Claramente deberemos llevar las ecuaciones de transformación disponibles para llevarlos a las formas de transformación obtenidas usando F_n.

2. Problema ejemplo sencillo, 1 GL

Enunciado Problema ejemplo

a) Determine el valor de la constante C tal que la siguiente transformación de variables q, p a nuevas variables Q, P sea canónica:

$$Q = C(p + im\omega q) \qquad P = C(p - im\omega q)$$

i es la constante imaginaria.

b) Encuentre la función generatriz $F_2(q, P)$ correspondiente a dicha transformación.

c) Encuentre el Hamiltoniano del oscilador armónico de masa m y constante $k = m\omega^2$, en las nuevas variables Q, P, y resuelva las correspondientes ecuaciones de Hamilton. Con este resultado obtenga la solución del problema del oscilador en las variables originales q, p.

Nota: En Mecánica Cuántica, esta transformación define los operadores de subida y bajada (creación y destrucción), que se usan para resolver los niveles de energía y los autoestados del oscilador armónico cuántico.

La solución de este Problema y del Probelma 9 dado en clase, sigue con el pdf del manuscrito (que es escrito a mano). Al final, se repite un par de carillas de la introducción pues incluye la figura ayuda memoria de las cuatro funciones generatrices.

Prob Esemplo:

$$Q = C(p + im\omega q) \quad (1) \qquad P = C(p - im\omega q) \quad (2)$$

i) Hallar C para que la transformación sea canónica.

ii) Encuentre la función generatriz $F_2(q, P)$

iii) Encuentre el Hamiltoniano del oscilador armónico: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$ en las nuevas variables, y obtenga la solución del problema (ecuaciones de Hamilton). Haga la transformación inversa para hallar la solución del problema en variables originales.

Solución:

Busquemos $F_2(q, P)$, esto deseara fijar C.

usaremos:

$$\begin{cases} Q = -\dfrac{\partial F_2}{\partial P}(q, P) & (3) \\ p = \dfrac{\partial F_2}{\partial q}(q, P) & (4) \end{cases}$$

de (2) y (4):

$$p = \frac{P}{C} + im\omega q = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad (5)$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{qP}{C} + \frac{im\omega q^2}{2} + g(P) \quad (6)$$

5 en 1 ; y usando 5

$$Q = P + 2C\, i m\omega\, q = -\frac{\partial F_2}{\partial P} \quad (7)$$

6 en 7 :

$$P + 2C\, i m\omega\, q = -\frac{q}{C} + \frac{\partial g}{\partial P}(P) \quad (8)$$

La parte en q debe cancelarse:

$$2C^2 i m\omega = -1$$

$$\boxed{C = \left(\frac{i}{2m\omega}\right)^{1/2}} \quad (9)$$

de 8 :

$$g(P) = \frac{P^2}{2}$$

$$\therefore \boxed{F_2(q,P) = \frac{qP}{C} + \frac{i m\omega q^2}{2} + \frac{P^2}{2}} \quad (10)$$

Check

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{P}{C} + i m\omega = p \quad (11)$$

$$-\frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{q}{C} + P = Q \quad (12)$$

Oscilador Armónico:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \quad (13)$$

$$\frac{1 + 2}{2C} \Rightarrow p = \frac{Q+P}{2C} \qquad \frac{1 - 2}{2 i m\omega C} \Rightarrow q = \frac{Q-P}{2 i m\omega C} \quad (14)$$

Cont. Ejemplo Transf. Canón.

(14) en (13):

$$K = \frac{1(Q+P)^2}{2\,\cancel{4}mC^2} + \frac{\cancel{m\omega^2}}{2}\,\frac{(Q-P)^2}{-4\cancel{m^2\omega^2}C^2}$$

$$K = \frac{1}{8mC^2}\left[4QP\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{K = -i\omega Q P} \qquad (15)$$

Ecuaciones de Hamilton:

(16) $\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = -i\omega Q \qquad \dot{P} = im\omega P$

Ecuaciones desacopladas.

(17) $\boxed{Q = Q_0 e^{-i\omega t}} \qquad \boxed{P = P_0 e^{i\omega t}}$

de (2) y (17) a $t=0$:

de (14) a $t=0$: $\begin{cases} Q_0 = C(p_0 + im\omega q_0) \\ P_0 = C(p_0 - im\omega q_0) \end{cases}$

en (17):

(18) $\begin{cases} Q = C(p_0 + im\omega q_0)e^{-i\omega t} = CAe^{-i(\omega t + \varphi_0)} \\ P = C(p_0 - im\omega q_0)e^{i\omega t} = CAe^{i(\omega t + \varphi_0)} \end{cases}$

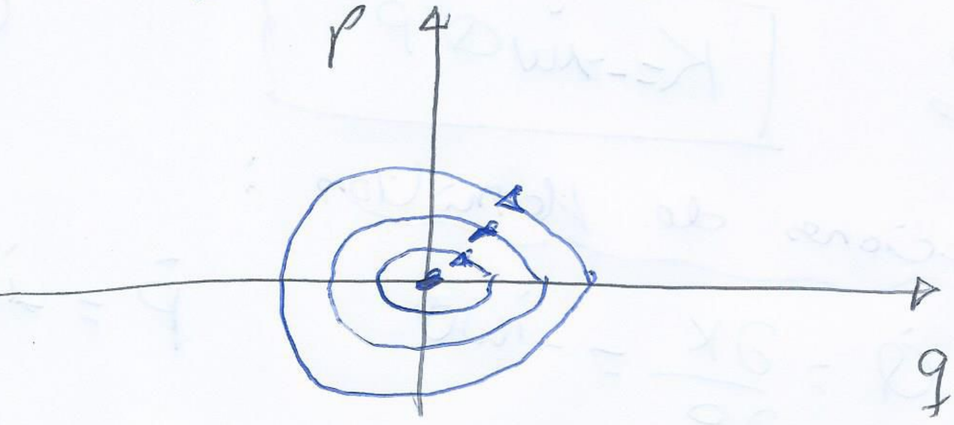
con $\begin{cases} A^2 = p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2 = 2mE \\ tg\,\varphi_0 = -\frac{m\omega q_0}{p_0} \end{cases}$

de (14):

$$\begin{cases} p = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ q = \dfrac{A}{m\omega}\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

Satisface:

$$\boxed{\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = \frac{A^2}{2m} = E}$$



Comentario:

$$K = -im\omega QP$$

Comparado con

$$H = \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)$$

$$Q \to a$$

$$P \to a^+$$

operadores de creación (subida) y destrucción (bajada) en Cuántica.

P9) Hamilton - Trafo. Canón.

Transformación Canónica, en principio es indep. del H, aunque se la diseña en función de este.

"Rotación en plano $x - P_Y$"

(1) $x = X\cosh\lambda + \dfrac{P_Y \sinh\lambda}{m\omega}$ (3) $P_x = -m\omega Y\sinh\lambda + P_x\cosh\lambda$

(2) $y = Y\cosh\lambda + \dfrac{P_x \sinh\lambda}{m\omega}$ (4) $P_Y = -m\omega X\sinh\lambda + P_Y\cosh\lambda$

de (1): $P_Y = \dfrac{m\omega}{\sinh\lambda}(x - X\cosh\lambda)$ (5)

de (2): $P_X = \dfrac{m\omega}{\sinh\lambda}(y - Y\cosh\lambda)$ (6)

(6) en (3): $P_x = -m\omega Y\sinh\lambda + m\omega\coth\lambda\,(y - Y\cosh\lambda)$ (7)

(5) en (4): $P_Y = -m\omega X\sinh\lambda + m\omega\coth\lambda\,(x - X\cosh\lambda)$ (8)

Estamos en el caso:

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F_1(q,Q)}{\partial q} \\ P = -\dfrac{\partial F_1(q,Q)}{\partial Q} \end{cases}$$

de (5): $P_Y = \dfrac{m\omega}{\sinh\lambda}(x - X\cosh\lambda) = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Y}$

$$\Rightarrow F_1 = -\frac{m\omega}{\sinh} Y\,(x - X\cosh) + g_1(x, X, y) \qquad (9)$$

de (6): $$P_X = \frac{m\omega}{\sinh}(y - Y\cosh) = -\frac{\partial F_1}{\partial X}$$

$$= -\frac{m\omega Y\cosh}{\sinh} - \frac{\partial g_1(x,X,y)}{\partial X}$$

$$\Rightarrow g_1 = -\frac{m\omega}{\sinh}\, yX + g_2(x, y) \qquad (10)$$

de (7):

$$p_x = -m\omega Y\sinh + m\omega\coth(y - Y\cosh) = -\frac{\partial F_1}{\partial x}$$

$$= -\frac{m\omega Y}{\sinh} + \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow g_2 = m\omega\coth xy + g_3(y) \qquad (11)$$

de (8): $$p_y = -m\omega X\sinh + m\omega\coth(x - X\cosh) = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$= -\frac{m\omega X}{\sinh} + m\omega\coth x + \frac{\partial g_3}{\partial y}$$

$$\Rightarrow g_3 = 0 \quad \text{(constante no agrega)}$$

60 $$\boxed{F_1 = -\frac{m\omega}{\sinh}(xY + yX) - m\omega\coth(xy + XY)}$$

Nuevo hamiltoniano:

$$K = \frac{1}{2m}\left[\left(-m\omega Y \sin h + P_x \cos h\right)^2 + \left(-m\omega X \sin h + P_y \cos h\right)^2\right]$$

$$+ \frac{m\omega^2}{2}\left[\left(X\cos h + \frac{P_y \sin h}{m\omega}\right)^2 + \left(Y\cos h + \frac{P_x \sin h}{m\omega}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(X^2 + Y^2\right)$$

(Los doble producto se cancelan y $s_h^2 + c_h^2 = 1$

Si $\quad H' = H + 2\alpha x p_y$

$$\Rightarrow K' = K + 2\alpha\left(X\cos h + \frac{P_y \sin h}{m\omega}\right)\left(-m\omega X \sin h + P_y \cos h\right)$$

$$= K + \alpha\left(-m\omega \sin 2h\, X^2 + \frac{P_y^2}{m\omega}\sin 2h\right)$$

$$+ 2\alpha\left(\cos 2h\right) X P_y$$

Si $\cos 2h = 0$ me quedan dos osciladores desacoplados.

$$\Rightarrow \boxed{h = \pi/4}$$

Los frecuencias cambian, (ejercicio)

• Si $y = P_y = 0$ sólo hay movimiento en x, P_x

pero en las nuevas variables hay movimiento en $\left\{ \begin{array}{l} X, P_X \\ Y, P_Y. \end{array} \right.$

(perjudicaría la transformación)

Transformaciones Canónicas

- Lagrangiano $Q(q,t)$: de contacto.

- Hamiltoniano $Q(q,p,t)$, $P(q,p,t)$

Si la dinámica satisface las ecuaciones de Hamilton

$$\left(\text{"Ecuaciones canónicas"}\right) \begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} \end{cases} \qquad (2)$$

Se dice que la transformación es canónica. ($\{q,p\}$ son "canónicamente conjugadas")

Satisfacer Hamilton tiene buenas consecuencias.

Principio variacional:

$$\delta S = \delta \int_1^2 [p\,dq - H\,dt]\,dt = 0 \qquad (3)$$

$\{q,p\}$ variando independientemente con extremos fijos.

en $\{Q,P\}$: $$\delta S' = \delta \int_1^2 [P\,dQ - K\,dt] = 0 \qquad (4)$$

Los integrandos pueden diferir en una derivada total. [cuya ~~variación~~ contribución a la es nula]

$$dF = p\,dq - P\,dQ - (H-K)\,dt. \qquad (5)$$

queda dando que: $F = F_1(q,Q,t)$

$$p = \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad (6)$$

en (5) podemos meter dP y sacar dQ.

$$d(F_1 + PQ) = p\,dq + Q\,dP - (H-K)\,dt \qquad (8)$$

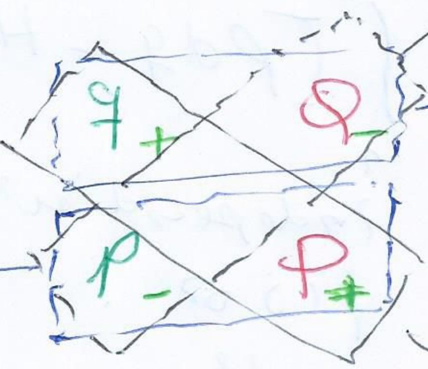
$$\boxed{F_2(q,P,t) = F_1(q,Q,t) + PQ} \qquad (9)$$

de (8):

$$p = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \qquad (10)$$

$F_3 \begin{cases} q = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p} \\ P = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q} \end{cases}$

$F_1 \begin{cases} p = \dfrac{\partial F_1}{\partial q} \\ P = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} \end{cases}$



$F_4 \begin{cases} q = -\dfrac{\partial F_4}{\partial P} \\ Q = \dfrac{\partial F_4}{\partial P} \end{cases}$

$F_2 \begin{cases} p = \dfrac{\partial F_2}{\partial q} \\ Q = \dfrac{\partial F_2}{\partial P} \end{cases}$

siempre: $K = H + \dfrac{\partial F}{\partial t}$