Ejercicio 6 Guía 7:Usando variables de ángulo-acción

Autor: Vladimir D. Rodríguez Chariarse

1. Introducción breve a la transformación a variables de ángulo-acción varios GL

La transformación es posible si H es constante y además la ecuación de Hamilton Jacobi es separable. La función generatriz que lleva a coordenadas cíclicas es la función característica de Hamilton $W(q_i, \alpha_i)$. La transformación de ángulo acción se da usando como nuevos momentos a las variables de acción:

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \tag{1}$$

en lugar de las constante de separación α_i. Para calcular las J_i es importante dibujar los diagramas de fase correspondientes al problema (utilizando las magnitudes conservadas). La función generatriz del caso separable se expresa,

$$W(\{q_k\}, \{J_k\}) = \sum_i W_i(q_i, \{J_k\})$$

el nuevo Hamiltoniano $K = E$:

$$K(\{J_k\}) = H(\{\frac{\partial W}{\partial q_k}\}, \{J_k\}) \tag{2}$$

Por lo que las ecuaciones de Hamilton en las nuevas coordenadas (variables de ángulo θ_i) y nuevos momentos (variables de acción J_i) son:

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial E(\{J_k\})}{\partial \theta_i} \qquad \Longrightarrow \qquad J_i = \text{constante} \tag{3}$$

$$\dot{\theta} = \underbrace{\frac{\partial E(\{J_k\})}{\partial J_i}}_{\omega(J_i)} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_i(t) = \omega_i(J)t + \theta_{i0} \tag{4}$$

Para poder resolver el problema original se debe relacionar θ_i con q_i. Esto se hace con la generatriz de la transformación que si es del tipo F_2 vale:

$$\theta_i = \frac{\partial W(\{q_k\}, \{J_k\})}{\partial J_i} \tag{5}$$

Hay que tomar en cuenta que aunque separable en coordenadas q_i, en principio puede haber dependencias cruzadas con J_k en las expresiones de los W_i.

1.1. Problema 6, Ángulo-Acción

Este problema se ha hecho usando muchos métodos. Ahora usaremos Ángulo-Acción, y aprovecharemos el planteo de Hamilton-Jacobi.

El Hamiltoniano es:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{(p_2 - kq_1)^2}{2m} \tag{6}$$

1.1.1. Variables de acción y frecuencias

Para calcular las variables de acción usaremos los diagramas de fase.

Calculo de J_2

Como q_2 es cíclica, p_2 es constante en el tiempo, su diagrama de fases son lineas de p_2 constante, que cortamos (arbitrariamente) en $q_2 = 2\pi$, con lo que tenemos:

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\oint p_2 dq_2 = \int_0^{2\pi} p_2 dq_2 = p_2 = \alpha_2 \quad \text{constante} \tag{7}$$

Calculo de J_1

Para calcular J_1 reescribimos el Hamiltoniano:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + k^2 \frac{(q_1 - \frac{\alpha_2}{k})^2}{2m} = E \tag{8}$$

Por lo que las curvas en el espacio de fases son elipses centradas en $\{q_1 = \alpha_1/k, \quad p_1 = 0\}$. El área encerrada ($\pi ab$) sólo depende de los semiejes a y b, en este caso:

$$J_1 = \frac{1}{2\pi}\oint p_1 dq_1 = \frac{1}{2\pi}\pi \underbrace{a}_{\sqrt{2mE}} \underbrace{b}_{\frac{\sqrt{2mE}}{k}} = \frac{mE}{k} \tag{9}$$

Por lo que tenemos:

$$E = \frac{kJ_1}{m} \tag{10}$$

de esta ecuación obtenemos las frecuencias de las variables de ángulo

$$\omega_1 = \frac{\partial E(J_1)}{\partial J_1} = \frac{k}{m} \qquad \omega_2 = \frac{\partial E(J_1)}{\partial J_2} = 0 \tag{11}$$

Usando las ecuaciones de Hamilton en Ángulo-Acción tenemos:

$$J_1 = J_{10} \qquad J_2 = J_{20} \qquad \theta_1 = \theta_{10} + \frac{k}{m}t \qquad \theta_2 = \theta_{20} \tag{12}$$

1.1.2. Variables de ángulo

Para relacionar las variables de ángulo con las coordenadas necesitamos la función generatriz W. Como en este caso la ecuación de H-J es separable en el tiempo proponemos $S = W - \alpha_1 t$, reemplazando en la ecuación de H-J, la función característica de Hamilton W satisface

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right) + \frac{\left(\frac{\partial W}{\partial q_1} - kq_1\right)^2}{2m} = \alpha_1 = E \tag{13}$$

Como siempre en caso de coordenada cíclica la separación es

$$W = W_1(q_1, \alpha_i) + \alpha_2 q_2 \tag{14}$$

por lo que la ecuación que define W_1 queda

$$W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2) = \int^{q_1} \sqrt{2m\alpha_1 - (\alpha_2 - kq_1')^2} dq_1' \tag{15}$$

reemplazamos las constantes $\alpha_1 = \frac{kJ_1}{m}$ y $\alpha_2 = J_2$ obteniendo para la función generatriz de la transformación de variables de Ángulo-Acción:

$$W(q_1, q_2, J_1, J_2) = \int^{q_1} \sqrt{2kJ_1 - (J_2 - kq_1')^2} dq_1' + J_2 q_2 \tag{16}$$

Como es usual no integramos, pues a veces es mas conveniente realizar las derivadas en el integrando, pues esta integral es más sencilla. Usamos ahora las ecuaciones de transformación que definen las θ_i:

$$\theta_1 = \frac{\partial W}{\partial J_1} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_1 = \arccos\left(\frac{J_2 - kq_1}{\sqrt{2kJ_1}}\right) \tag{17}$$

$$\theta_2 = \frac{\partial W}{\partial J_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_2 = q_2 - \frac{1}{k}\sqrt{2kJ_1 - (J_2 - kq_1)^2} \tag{18}$$

donde se usó una tabla de integrales o las expresiones del apunte de Maxi.

Se les deja la tarea de identificar las constantes y escribir la expresión explícita para las coordenadas originales en función del tiempo.