Ejercicio 7 Guía 7: Péndulo físico: variables de ángulo-acción

Autor: Vladimir D. Rodríguez Chariarse

1. Introducción breve a la transformación a variables de ángulo-acción 1 GL

Esta introducción sigue el libro de Percival y Richards sobre sistemas dinámicos. La transformación desde $\{q, p\}$ buscada es aquella en la cual el nuevo Hamiltoniano sólo depende del nuevo momento J (variable de acción) y no depende de la nueva coordenada θ (variable de ángulo). Como esta última es cíclica el nuevo momento es constante. Para simplificar las derivaciones usaremos que si la transformación es canónica se preservan las áreas en el espacio de fases.

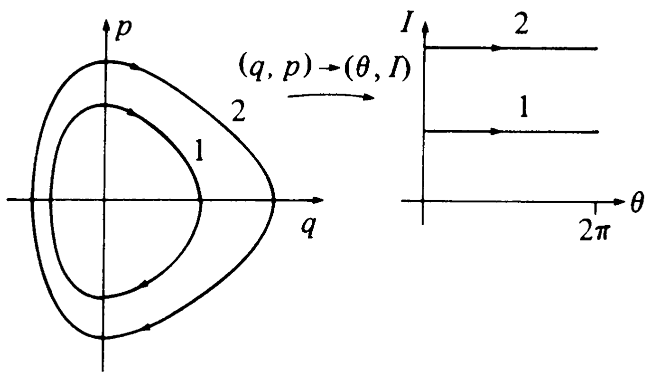

Figura 1: *Diagrama de fases.*

Para el caso mostrado en la figura (libración) cada vez que q recorre un ciclo la variable θ recorre 2π. Por igualdad de las áreas:

$$\oint p dq = 2\pi J \qquad \Longrightarrow \qquad J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \tag{1}$$

El Hamiltoniano nuevo es $E(J)$, como θ es cíclica la solución de las ecuaciones de Hamilton en las nuevas variables es simple:

$$\dot{J} = -\frac{\partial E(J)}{\partial \theta} \qquad \Longrightarrow \qquad J = \text{constante} \tag{2}$$

$$\dot{\theta} = \underbrace{\frac{\partial E(J)}{\partial J}}_{\omega(J)} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta(t) = \omega(J)t + \theta_0 \tag{3}$$

En un período τ, θ se incrementa en 2π por lo que ω es la frecuencia angular del movimiento.

$$\omega(J) = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{\partial E(J)}{\partial J} \tag{4}$$

Por construcción tenemos que q y p son funciones periódicas de θ:

$$q(\theta, J) = q(\theta + 2\pi, J) \qquad p(\theta, J) = p(\theta + 2\pi, J) \tag{5}$$

Para poder resolver el problema original se debe relacionar θ con q. Nuevamente usaremos la propiedad de las areas.

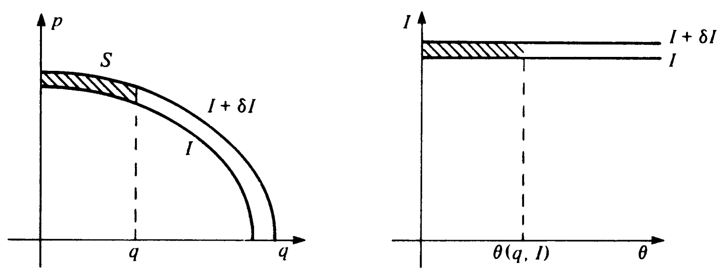

Figura 2: *Secciones del espacio de fases entre J y $J + \delta J$ en las representaciones $\{q, p\}$ y $\{\theta, J\}$ El área S en $\{q, p\}$ se transforma en el área sombreada en $\{\theta, J\}$. De esta igualdad se determina $\theta(q)$.*

De la figura:

Area en $\{q, p\}$

$$\delta A = \int_0^q [p(q, J + \delta J) - p(q, J)] dq \tag{6}$$

$$= \int_0^q \frac{\partial p(q, J)}{\partial J} \delta J dq \tag{7}$$

Area en $\{\theta, J\}$

$$\delta A = \theta \delta J \tag{8}$$

Igualando las áreas y sacando la derivada parcial de la integral:

$$\theta = \frac{\partial}{\partial J} \underbrace{\int_0^q p(q, J) dq}_{W(q,J)} \tag{9}$$

En esta ecuación identificamos a la función generatriz de la transformación

$$F_2(q, J) = W(q, J) = \int_0^q p(q, J)dq$$

La variación de $F_2(q, J)$ en un período del movimiento (un ciclo completo) es:

$$\Delta F_2 = \oint \frac{\partial F_2}{\partial q}dq = \oint pdq = 2\pi J \tag{10}$$

Por otro lado la función generatriz tipo $F_1(q, \theta)$ está relacionada a $F_2(q, J)$ mediante:

$$F_1(q, \theta) = F_2(q, J) - \theta J \tag{11}$$

por lo que su cambio en un período es:

$$\Delta F_1(q, \theta) = \Delta F_2(q, J) - \Delta(\theta J) = 2\pi J - \underbrace{\Delta\theta}_{2\pi} J = 0 \tag{12}$$

Por lo que $F_1(q, \theta)$ es una función periódica de q, a diferencia de $F_2(q, J)$. Esto último resuelve en 1GL el problema 5.

Antes de finalizar esta introducción, veamos su generalización a muchos grados de libertad. En este caso queda claro que la transformación es posible si H es constante y además el problema de H-J es separable. La función generatriz que lleva a coordenadas cíclicas es la función característica de Hamilton $W(q_i, \alpha_i)$. La transformación de ángulo acción se da usando como nuevos momentos a las variables de acción:

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i$$

en lugar de las constante de separación α_i. Para hacer este cálculo es importante dibujar los diagramas de fase correspondientes al problema. Acordarse que la función generatriz del caso separable era:

$$W(q_k, J_k) = \sum_i W_i(q_i, \{J_k\})$$

2. P7: Péndulo físico

El péndulo lo caracterizamos por dos magnitudes, su momento de inercia I con respecto al punto de suspensión (por donde pasa el eje de rotación) y por la distancia del centro de masa a dicho punto d. El Hamiltoniano ($H = T + V$) está dado por:

$$H = \frac{I}{2}\dot{\psi}^2 - mgd\cos(\psi)$$

y en función del momento $p_\psi = I\dot{\psi}$

$$H = \frac{1}{2I}(p_\psi^2 - 2\alpha^2\cos(\psi)) \qquad \alpha^2 = mgdI$$

2.1. Curva separatriz

La curva separatriz que divide el movimiento de libración (periódico acotado), del de rotación (periódico no acotado), se obtiene considerando una energía tal que en $\psi = \pi$ tengamos $p_\psi = 0$:

$$E_s = \frac{\alpha^2}{I} = \frac{1}{2I}(p_\psi^2 - 2\alpha^2 \cos(\psi)$$

de donde

$$p_\psi^2 = 2\alpha^2 \underbrace{(1+\cos(\psi))}_{2\cos^2(\psi/2)} \qquad \Longrightarrow \qquad p_\psi = \pm 2\alpha \cos(\psi/2)$$

Si $E < E_s$, el movimiento es de libración (oscilaciones). Si $E > E_s$ el movimiento es de rotación y puede ser horaria o anti-horaria.

2.2. Puntos de equilibrio

Los punto con la mínima energía $E = -\frac{\alpha^2}{I}$ y $\psi = 2n\pi$ con n entero son puntos de equilibrio estable pues están en los mínimos de potencial. Cerca de estos puntos las trayectorias en el espacio de fases son elípticas.

Los puntos con energías $E = \frac{\alpha^2}{I}$ y $\psi = (2n+1)\pi$ son puntos de equilibrio inestables. Cerca de estos puntos las trayectorias en el espacio de fases son hiperbólicas, y al cambiar ligeramente la posición de la partícula, la partícula sigue dichas trayectorias alejándose del equilibrio inestable

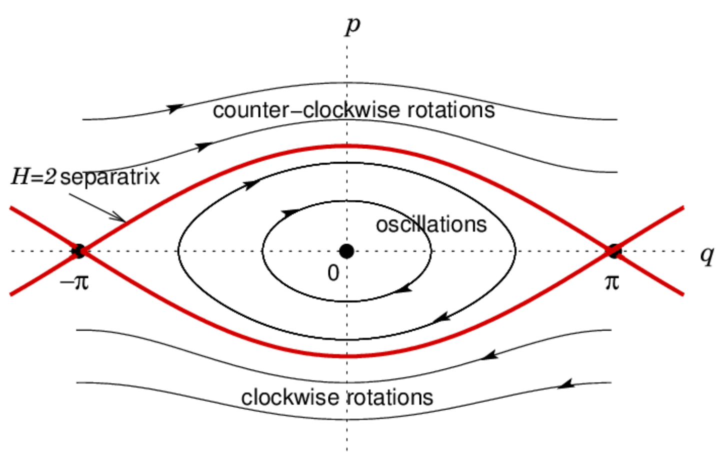

Figura 3: *Diagrama de fases p_ψ (vertical) vs ψ (horizontal), para distintos valores de E.*