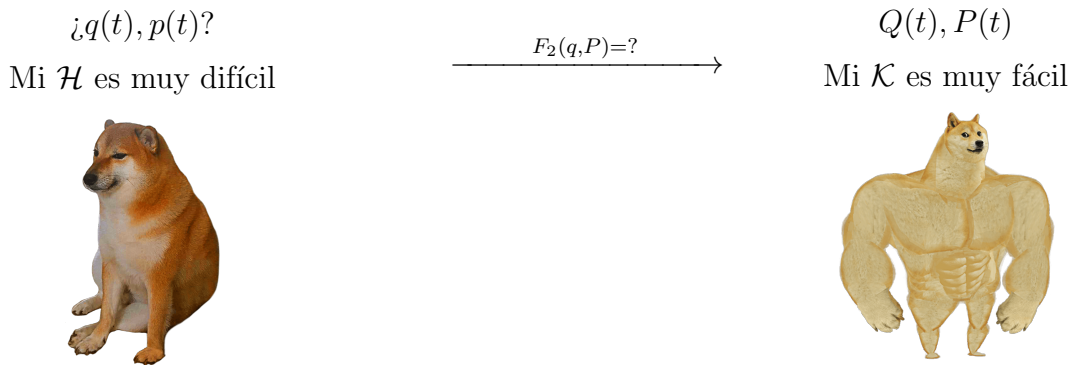


Guía 7c - Ángulo-Acción

Resumen H-J + A-A

Tanto Hamilton-Jacobi como Ángulo-Acción son transformaciones dadas por una función generatriz F_2 . Resulta un poco confuso que empiezan a aparecer muchas letras, pero hacemos eso para diferenciar una transformación de otra. En el fondo, el mecanismo es el mismo para todos los métodos: elegimos un nuevo Hamiltoniano donde resolvemos fácilmente el sistema, hallamos la generatriz que nos lleva a él y antitransformamos para volver a las variables originales



4) Antitransformo: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$, $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

Hallo $q(Q, P, t)$, $p(Q, P, t)$

← 3) Encuentro quién es $F_2(q,P)$

1) Elijo \mathcal{K}

2) Hallo $Q(t), P(t)$

Abajo está detallado en una tabla los nombres de las variables que usamos en cada caso. En el fondo todo es convención y como siempre hay más de una, así que tómenlo solo como una guía

	HAMILTON-JACOBI	ÁNGULO-ACCIÓN
	$(Q, P) \equiv (\beta, \alpha)$	$(Q, P) \equiv (\theta, J)$
1)	$\mathcal{K} = 0$	$\mathcal{K} = E(J)$
2)	$Q_k = \beta_k = cte$ $P_k = \alpha_k = cte$	$J_k = \oint \frac{p_k dq_k}{2\pi} = cte$ $\omega_k = \frac{\partial E}{\partial J_k} = \left(\frac{\partial J_k}{\partial E} \right)^{-1}$ $\theta_k = \omega_k t + \theta_{k0}$
3)	$\mathcal{H} \left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ $F_2(q, P, t) \equiv S(q, \alpha, t)$	$\mathcal{H} \left(q, p = \frac{\partial W_J}{\partial q}, t \right) = E(J)$ $F_2(q, P, t) \equiv W_J(q, J)$
4)	$\beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \rightarrow q(\beta, \alpha, t)$	$\theta_k = \frac{\partial W_J}{\partial J_k} \rightarrow q(\theta_0, J, t)$

Tabla 1: Tabla-resumen de H-J y A-A. En A-A se asumió que el sistema es conservativo $\mathcal{H} = E$.

Ejercicio 8

Nos dicen que una partícula se mueve en un potencial

$$\mathcal{H} = E = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad V = \frac{m\lambda^2}{2}(|q| - a)^2 = \begin{cases} \frac{m\lambda^2}{2}(q + a)^2, & \text{si } q \leq 0 \\ \frac{m\lambda^2}{2}(q - a)^2, & \text{si } q \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Este potencial corresponde a un movimiento oscilatorio alrededor de los puntos $\pm a$, como podemos ver de la figura 1. Existen dos regiones diferenciadas; en una la oscilación es alrededor de un único mínimo mientras que en la otra la partícula oscila alrededor de dos mínimos. Podemos encontrar puntos de retorno cuando $p = 0$

$$E = \frac{m\lambda^2}{2}(|q_r| - a)^2 \Rightarrow |q_r| = a \pm \sqrt{\frac{2E}{m\lambda^2}} \geq 0 \quad (2)$$

- **Separatriz.** El valor particular de energía $E = E_s$ separa los dos tipos de movimiento, y está dado por el valor de V_{eff} cuando $p = q = 0$ con puntos de retorno en $\pm q^*$

$$E_s = V_{eff}(q = 0) = \frac{m\lambda^2}{2}a^2 \quad \rightarrow \quad \pm q_* = a + \sqrt{\frac{2E_s}{m\lambda^2}} = 2a \quad (3)$$

- **Regiones I: Libración.** En esta región la partícula oscila alrededor de un único mínimo fijo en $q_{eq} = -a$. No podemos pasar de un mínimo a otro porque la energía no es suficiente para superar la barrera de potencial. Según las condiciones iniciales empezaremos en una región y en esa nos quedamos. En este caso estamos en $q < 0$. Si $E < E_s$ tenemos cuatro puntos de retorno, dos con $q > 0$ y dos con $q < 0$. Los dos con $q < 0$ correspondientes a esta región son

$$-q_1 = -\left(a - \sqrt{\frac{2E}{m\lambda^2}}\right), \quad -q_2 = -\left(a + \sqrt{\frac{2E}{m\lambda^2}}\right) \quad (4)$$

- **Región II: Libración.** Esta región es totalmente análoga a la región 1, con la diferencia que ahora $q > 0$ y la oscilación es alrededor de $q_{eq} = +a$. Los dos puntos de retorno de esta región son $+q_1$ y $+q_2$.
- **Región III: Libración.** En esta región la partícula oscila alrededor de dos mínimos. Aunque en todas las regiones tenemos libración, son oscilaciones diferentes, por eso les ponemos distintos colores. Si $E > E_s$ solo tenemos dos puntos de retorno porque la rama $a - \sqrt{2E/m\lambda^2}$ es < 0 y por lo tanto no puede ser igual al valor absoluto $|q_r|$. Los llamaremos $\pm q_3 = a + \sqrt{2E/m\lambda^2}$. La definición de q_3 es igual a q_2 pero la energía es más grande.

El diagrama de fases es simétrico respecto del eje horizontal. Para calcular la variable de acción solo es necesario calcular la mitad superior con $p_\psi > 0$; la mitad inferior será igual por

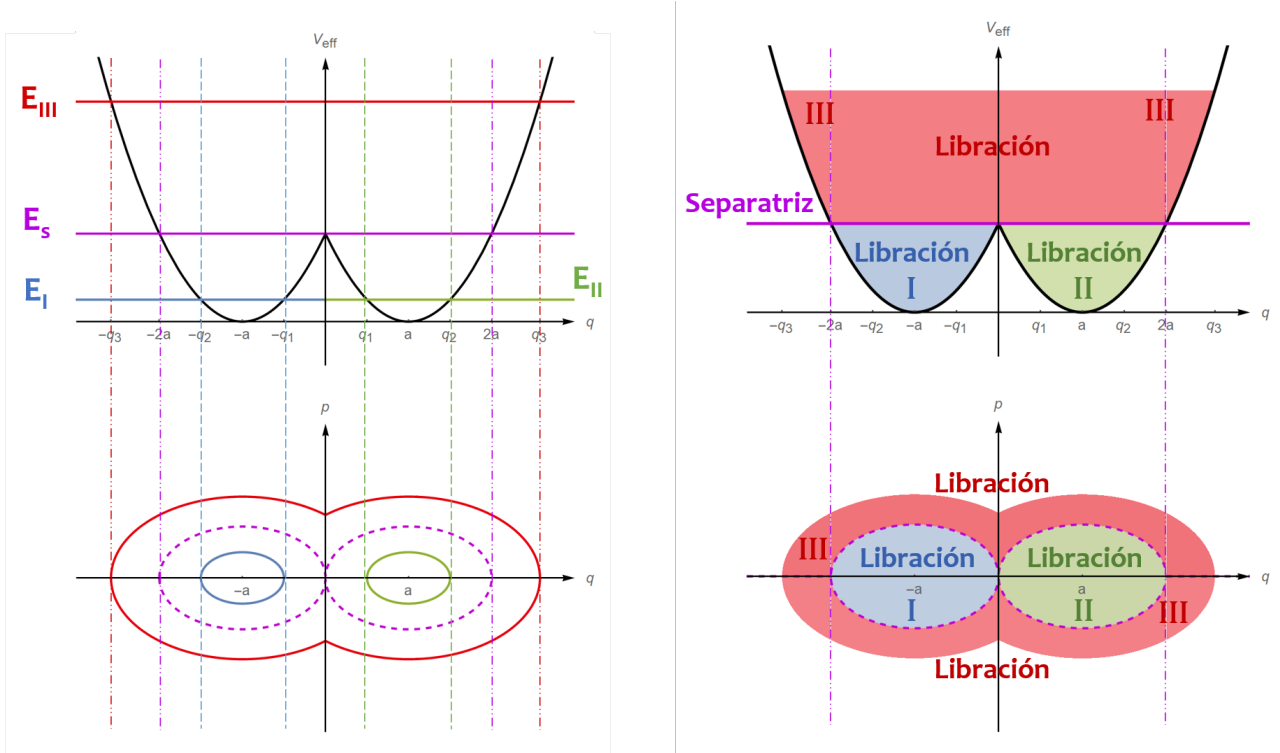


Figura 1: Potencial efectivo y diagrama de fases para ejercicio 8.

simetría. Explícitamente,

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2\pi} \oint p dq \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{q_A}^{q_B} \sqrt{2mE - m^2\lambda^2(|q| - a)^2} dq + \frac{1}{2\pi} \int_{q_B}^{q_A} \left(-\sqrt{2mE - m^2\lambda^2(|q| - a)^2} \right) dq \\
 &= \frac{1}{2\pi} 2 \int_{q_A}^{q_B} \sqrt{2mE - m^2\lambda^2(|q| - a)^2} dq \quad (5)
 \end{aligned}$$

Cada región tiene asociada una variable de acción distinta debido a que los puntos de retorno son distintos en cada caso

$$\begin{aligned}
 J_{III} &= \frac{1}{2\pi} 2 \int_{-q_3}^{q_3} \sqrt{2mE - m^2\lambda^2(|q| - a)^2} dq \\
 J_I = J_{II} &= \frac{1}{2\pi} 2 \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2mE - m^2\lambda^2(q - a)^2} dq \quad (6)
 \end{aligned}$$

Para hallar $J_i(E)$ hay que hacer la integral que figura allí. Notar que $J_I = J_{II}$ debido a que por simetría la en q en el potencial esas áreas son iguales. Así que para hacer el cálculo elegimos una (yo elegí $q > 0$).

Lo que quería acá es hablar de un truco. Uno puede hacer la integral en cada caso y chequear que para la región I el resultado es $J_I = E/\lambda$. Sin embargo, existe una forma mucho más simple de llegar a este resultado. Se basa en explotar el hecho de que $J = Area/2\pi$. Si

justo conocemos el área de la figura que estamos integrando, por ser una forma geométrica conocida, entonces podemos aprovecharlo para simplificar el cálculo. En nuestro caso tenemos una elipse; si reacomodamos un poco los términos en la ecuación de la energía y suponemos que $q > 0$ veremos que

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\lambda^2}{2}(q-a)^2 = E \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2mE} + \frac{(q-a)^2}{2E/m\lambda^2} = \frac{p^2}{B^2} + \frac{(q-a)^2}{A^2} = 1 \quad (7)$$

Por lo tanto podemos llegar fácilmente a que

$$J_I = \frac{Area}{2\pi} = \frac{\pi AB}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{m\lambda^2}} = \frac{E}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \omega_I = \omega_{II} = \frac{\partial E}{\partial J} = \lambda \quad (8)$$

La frecuencia del movimiento en las regiones I y II es $\omega_I = \omega_{II} = \lambda$.

Para la zona III el movimiento se dificulta un poco, el área ya no es conocida. En este caso en particular el potencial es simétrico también respecto del eje vertical (cambiar $q \leftrightarrow -q$ no modifica el módulo), así que en vez de calcular $2 \int_{-q_3}^{q_3}$ podríamos calcular $4 \int_0^{q_3}$. Fijense que tenemos $\sqrt{1 - \text{algo}^2}$, que se parece a una función trigonométrica tipo $\cos(u) = \sqrt{1 - \sin(u)^2}$. Haciendo el cambio de variables $\sin(u) = \sqrt{m\lambda^2/2E}(q-a)$ y explotando todas las simetrías (vertical y horizontal) tenemos que

$$\begin{aligned} J_{III} &= \frac{1}{2\pi} 4\sqrt{2mE} \int_0^{q_3} \sqrt{1 - \frac{m\lambda^2}{2E}(q-a)^2} dq \\ &= \frac{1}{2\pi} 4\sqrt{2mE} \int_{u(0)}^{u(q_3)} \underbrace{\sqrt{1 - \sin(u)^2}}_{=\cos(u)} \left(\sqrt{\frac{2E}{m\lambda^2}} \cos(u) du \right) \\ &= \frac{4E}{\pi\lambda} \int_{u(0)}^{u(q_3)} \cos(u)^2 du = \dots \\ &= \frac{2E}{\pi\lambda} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\sqrt{\frac{m}{2E}} \lambda a \right) - \sqrt{\frac{m}{2E}} \lambda a \sqrt{1 - \frac{m}{2E} \lambda^2 a^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

donde se usó que $\cos(\arcsin(Ax)) = \sqrt{1 - A^2 x^2}$. Como vemos, usar el área en II es más fácil que realizar una integral de este tipo.

Si quisieramos la frecuencia simplemente calculamos $\omega_{III} = (\partial J_{III}/\partial E)^{-1}$.

Moraleja: Si conoce el área, úsela!

Vimos que $\omega_I = \omega_{II} = \lambda$ (ω_{III} también crece con λ). Un breve comentario al respecto. El valor de λ marca la pendiente de la cuadrática: si aumenta, el V_{eff} crecerá más rápidamente y la distancia entre los puntos de retorno será menor. En la figura 2 se muestra el potencial efectivo para diversos valores de λ .

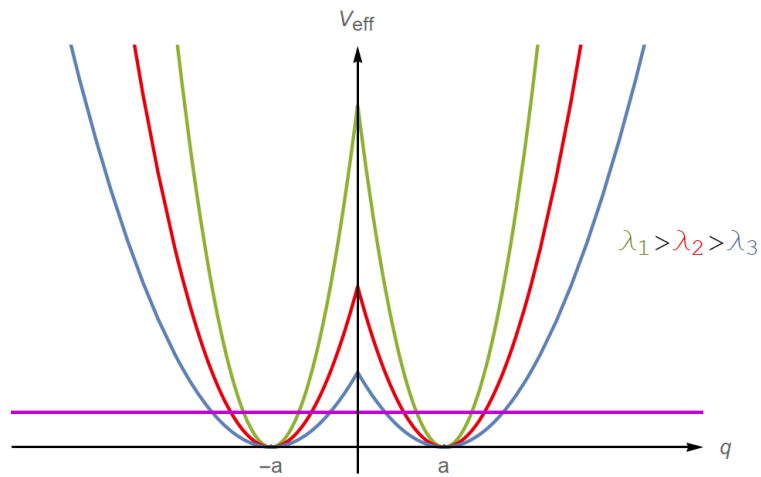


Figura 2: Potencial efectivo para distintos valores de λ .