1)

$$
\begin{aligned}
[\sqrt{2p_1}\sin q_1, \sqrt{2p_1}\cos q_1] &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial(\sqrt{2p_1}\sin q_1)}{q_i}\frac{\partial(\sqrt{2p_1}\cos q_1)}{p_i} - \frac{\partial(\sqrt{2p_1}\sin q_1)}{p_i}\frac{\partial(\sqrt{2p_1}\cos q_1)}{q_i}\right)\\
&= \frac{\partial(\sqrt{2p_1}\sin q_1)}{q_1}\frac{\partial(\sqrt{2p_1}\cos q_1)}{p_1} - \frac{\partial(\sqrt{2p_1}\sin q_1)}{p_1}\frac{\partial(\sqrt{2p_1}\cos q_1)}{q_1}\\
&= \sqrt{2p_1}\cos q_1 \frac{1}{\sqrt{2p_1}}\cos q_1 + \frac{1}{\sqrt{2p_1}}\sin q_1 \sqrt{2p_1}\sin q_1\\
&= \cos^2 q_1 + \sin^2 q_1 = 1
\end{aligned}
$$

2) Usando las definiciones de x, y, p_x, p_y

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2) \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\ \ \sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2)\\
y &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2) \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2),
\end{aligned}
$$

y usando lo obtenido en **1)** junto a

$$
[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0;\ [q_i, p_j] = \delta_{ij};\ [f, q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i};\ [f, p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}
$$

tenemos:

$$
\begin{aligned}
[x, y] &= [\frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2), \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2)]\\
&= \frac{1}{m\omega}(\underbrace{[\sqrt{2p_1}\sin q_1, \sqrt{2p_1}\cos q_1]}_{=1} + \underbrace{[\sqrt{2p_1}\sin q_1, q_2]}_{=0} + \underbrace{[p_2, \sqrt{2p_1}\cos q_1]}_{=0} + \underbrace{[p_2, q_2]}_{=-1})\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[p_x, p_y] &= [\frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2), \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2)]\\
&= \frac{m\omega}{4}(\underbrace{[\sqrt{2p_1}\cos q_1, -\sqrt{2p_1}\sin q_1]}_{=1} + \underbrace{[\sqrt{2p_1}\cos q_1, p_2]}_{=0} + \underbrace{[-q_2, -\sqrt{2p_1}\sin q_1]}_{=0} + \underbrace{[-q_2, p_2]}_{=-1})\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[x, p_y] &= \frac{1}{2}(\underbrace{[\sqrt{2p_1}\sin q_1, -\sqrt{2p_1}\sin q_1]}_{=0} + \underbrace{[\sqrt{2p_1}\sin q_1, p_2]}_{=0} + \underbrace{[p_2, -\sqrt{2p_1}\sin q_1]}_{=0} + \underbrace{[p_2, p_2]}_{=0})\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[y, p_x] &= \frac{1}{2}(\underbrace{[\sqrt{2p_1}\cos q_1, \sqrt{2p_1}\cos q_1]}_{=0} + \underbrace{[\sqrt{2p_1}\cos q_1, -q_2]}_{=0} + \underbrace{[q_2, \sqrt{2p_1}\cos q_1]}_{=0} + \underbrace{[q_2, -q_2]}_{=0}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[x, p_x] &= \frac{1}{2}(\underbrace{[\sqrt{2p_1}\sin q_1, \sqrt{2p_1}\cos q_1]}_{=1} + \underbrace{[\sqrt{2p_1}\sin q_1, -q_2]}_{=0} + \underbrace{[p_2, \sqrt{2p_1}\cos q_1]}_{=0} + \underbrace{[p_2, -q_2]}_{=1}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[y, p_y] &= \frac{1}{2}(\underbrace{[\sqrt{2p_1}\cos q_1, -\sqrt{2p_1}\sin q_1]}_{=1} + \underbrace{[\sqrt{2p_1}\cos q_1, p_2]}_{=0} + \underbrace{[q_2, -\sqrt{2p_1}\sin q_1]}_{=0} + \underbrace{[q_2, p_2]}_{=1}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

3) Tenemos una transformación $F_1(x, y, q_1, q_2)$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
p_1 &= -\frac{\partial F_1(x, y, q_1, q_2)}{\partial q_1};\ p_2 = -\frac{\partial F_1(x, y, q_1, q_2)}{\partial q_2} \\
p_x &= \quad \frac{\partial F_1(x, y, q_1, q_2)}{\partial x};\ p_y = \quad \frac{\partial F_1(x, y, q_1, q_2)}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

De la expresión de y despejamos

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2) \Rightarrow \sqrt{2p_1} = \frac{\sqrt{m\omega}y - q_2}{\cos q_1} \\
p_1 &= \frac{m\omega y^2 - 2\sqrt{m\omega}yq_2 + q_2^2}{2\cos^2 q_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_1}.
\end{aligned}
$$

Reemplazando $\sqrt{2p_1}$ en las expresiones para x, p_x, p_y queda

$$
\begin{aligned}
p_x &= \frac{m\omega}{2} y - \sqrt{m\omega} q_2 = \frac{\partial F_1}{\partial x} \\
F_1 &= \frac{m\omega}{2} xy - \sqrt{m\omega} x q_2 + g_1(y, q_1, q_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_y &= -(m\omega y - \sqrt{m\omega} q_2) \tan q_1 + \frac{m\omega}{2} x = \frac{\partial F_1}{\partial y} \\
&- (m\omega y - \sqrt{m\omega} q_2) \tan q_1 + \frac{m\omega}{2} x = \frac{m\omega}{2} x + \frac{\partial g_1}{\partial y} \\
g_1 &= -(\frac{m\omega}{2} y^2 - \sqrt{m\omega} q_2 y) \tan q_1 + g_2(q_1, q_2) \\
F_1 &= \frac{m\omega}{2} xy - \sqrt{m\omega} x q_2 - (\frac{m\omega}{2} y^2 - \sqrt{m\omega} q_2 y) \tan q_1 + g_2(q_1, q_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (\sqrt{2p_1} \sin q_1 + p_2) \\
p_2 &= \sqrt{m\omega} x - (\sqrt{m\omega} y - q_2) \tan q_1 = -\frac{\partial F_1}{\partial q_2} \\
&\sqrt{m\omega} x - \sqrt{m\omega} y \tan q_1 + q_2 \tan q_1 = \sqrt{m\omega} x - \sqrt{m\omega} y \tan q_1 - \frac{\partial g_2}{\partial q_2} \\
g_2 &= -\frac{q_2^2}{2} \tan q_1 + g_3(q_1) \\
F_1 &= \frac{m\omega}{2} xy - \sqrt{m\omega} x q_2 - (\frac{m\omega}{2} y^2 - \sqrt{m\omega} q_2 y + \frac{q_2^2}{2}) \tan q_1 + g_3(q_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 =& \frac{m\omega y^2 - 2\sqrt{m\omega} y q_2 + q_2^2}{2 \cos^2 q_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_1} \\
& \frac{m\omega y^2 - 2\sqrt{m\omega} y q_2 + q_2^2}{2 \cos^2 q_1} = \frac{m\omega y^2 - 2\sqrt{m\omega} y q_2 + q_2^2}{2 \cos^2 q_1} - \frac{\partial g_3}{\partial q_1} \\
& \frac{\partial g_3}{\partial q_1} = 0 \\
& g_3 = C \\
& F_1 = \frac{m\omega}{2} xy - \sqrt{m\omega} x q_2 - (\frac{m\omega}{2} y^2 - \sqrt{m\omega} q_2 y + \frac{q_2^2}{2}) \tan q_1 + C
\end{aligned}
$$

Finalmente, F_1 resulta

$$F_1 = \frac{m\omega}{2} xy + \sqrt{m\omega} x q_2 - \frac{1}{2} (\sqrt{m\omega} y - q_2)^2 \tan q_1$$

Donde nos podemos olvidar de la constante C pues no es relevante.

4) Tenemos un campo magnético $\vec{B} = (0, 0, B)$ y $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} = (-By, Bx, 0)$, el Lagrangiano para una partícula cargada dentro de un campo magnético es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}.$$

El momento canónico es

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c} \vec{A} \;\Rightarrow\; \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m} (\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}).$$

El Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - \mathcal{L},$$

reemplazando $\dot{\vec{r}}$ por la expresión de recién obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{1}{m}\vec{p}\cdot(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}) - \frac{1}{2m}(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})^2 - \frac{1}{m}(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})\cdot\frac{q}{c}\vec{A} = \frac{1}{2m}(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})^2 \\
\mathcal{H} &= \frac{1}{2m}((p_x+\frac{m\omega}{2}y)^2+(p_y-\frac{m\omega}{2}x)^2+p_z^2).
\end{aligned}$$

El Hamiltoniano transformado (solo se transforma en el plano $x-y$) es

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t},$$

como la F_1 encontrada no depende de t, reemplazamos las expresiones de x, y, p_x, p_y en el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{1}{2m}((\frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2) + \frac{m\omega}{2}\frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2))^2 \\
&\quad + (\frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2) - \frac{m\omega}{2}\frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2))^2 + p_z^2) \\
&= \frac{1}{2m}(2m\omega p_1\cos^2 q_1 + 2m\omega p_1 \sin^2 q_1 + p_z^2) \\
\mathcal{K} &= \omega p_1 + \frac{p_z^2}{2m}.
\end{aligned}$$

Solución de las ecuaciones de movimiento en variables nuevas y en variables originales

Para q_1:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_1} = 0 \;\Rightarrow\; p_1 = cte. = \alpha \\
\dot{q}_1 &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_1} = \omega \;\Rightarrow\; q_1 = q_{1_0} + \omega t
\end{aligned}$$

Para q_2:

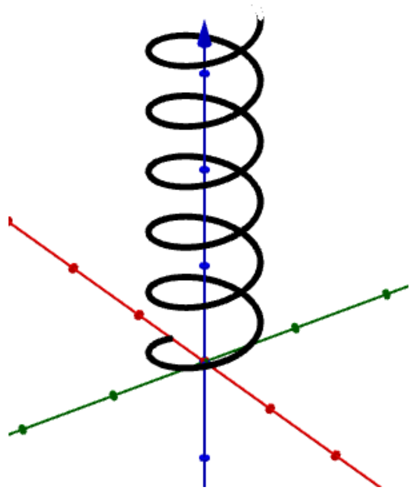
$$\begin{aligned}
\dot{p}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_2} = 0 \;\Rightarrow\; p_2 = cte. = \beta \\
\dot{q}_2 &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_2} = 0 \;\Rightarrow\; q_2 = q_{2_0}
\end{aligned}$$

Para z:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_z &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial z} = 0 \;\Rightarrow\; p_z = cte. = m\dot{z}_0 \\
\dot{z} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \;\Rightarrow\; z = z_0 + \dot{z}_0 t
\end{aligned}$$

Reemplazando lo obtenido en x, y llegamos a:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2\alpha}\sin(q_{1_0}+\omega t) + \beta) \\
y &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2\alpha}\cos(q_{1_0}+\omega t) + q_{2_0}) \\
z &= z_0 + \dot{z}_0 t
\end{aligned}$$



El movimiento resulta ser una hélice en la dirección z, donde el ancho de la hélice depende de α y su centro depende de q_{2_0} y β, que salen de las condiciones iniciales. Esto concuerda con lo esperado para una particula cargada en un campo magnético.

5) Sabemos que para que ambas generatrices respeten las ecuaciones de Hamilton deben cumplir la relación

$$F_2 = F_1 + \vec{q} \cdot \vec{p_q}$$

Utilizando la expresión de x despejamos q_1

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1} \sin q_1 + p_2)$$

$$\Rightarrow q_1 = \arcsin(\frac{\sqrt{m\omega}x - p_2}{\sqrt{2p_1}})$$

Y reemplazando q_1 en la expresión para y

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1} \cos q_1 + q_2)$$

$$\Rightarrow q_2 = \sqrt{m\omega}y - \sqrt{2p_1} \cos(\arcsin(\frac{\sqrt{m\omega}x - p_2}{\sqrt{2p_1}}))$$

$$= \sqrt{m\omega}y - \sqrt{2p_1}\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{m\omega}x - p_2}{\sqrt{2p_1}}\right)^2}$$

Con el fin de simplificar las cuentas llamo $b = \dfrac{\sqrt{m\omega}x - p_2}{\sqrt{2p_1}}$, entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
F_2 &= F_1 + q_1 p_1 + q_2 p_2 \\
&= \frac{m\omega}{2} xy + \sqrt{m\omega} x q_2 - \frac{1}{2}(\sqrt{m\omega}y - q_2)^2 \tan q_1 + q_1 p_1 + q_2 p_2 \\
&= \frac{m\omega}{2} xy + \sqrt{m\omega} x(\sqrt{m\omega}y - \sqrt{2p_1}\sqrt{1-b^2}) - \frac{1}{2}(\sqrt{m\omega}y - \sqrt{m\omega}y + \sqrt{2p_1}\sqrt{1-b^2})^2 \tan(\arcsin(b)) \\
&\quad + \arcsin(b)p_1 + (\sqrt{m\omega}y - \sqrt{2p_1}\sqrt{1-b^2})p_2 \\
&= \frac{3}{2} m\omega xy + \arcsin(b)p_1 + \sqrt{m\omega}yp_2 - \sqrt{2p_1}\sqrt{1-b^2}\sqrt{m\omega}x - p_1(\sqrt{1-b^2})^2 \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} - \sqrt{2p_1}\sqrt{1-b^2}p_2 \\
&= \frac{3}{2} m\omega xy + \arcsin(b)p_1 + \sqrt{m\omega}yp_2 - \sqrt{2p_1}\sqrt{1-b^2}\sqrt{m\omega}x - p_1 b\sqrt{1-b^2} - \sqrt{2p_1}\sqrt{1-b^2}p_2 \\
&= \arcsin(b)p_1 + \frac{3}{2} m\omega xy + p_2\sqrt{m\omega}y - \sqrt{2p_1(1-b^2)m\omega x} + p_1 b\sqrt{1-b^2} - p_2\sqrt{2p_1(1-b^2)}
\end{aligned}
$$

Finalmente, luego de muchas simplificaciones llegamos a:

$$
F_2(x, y, p_1, p_2) = \arcsin(\frac{\sqrt{m\omega}x - p_2}{\sqrt{2p_1}})p_1 - \frac{1}{2} m\omega xy + p_2\sqrt{m\omega}y - \frac{1}{2}\sqrt{2p_1 - (\sqrt{m\omega}x - p_2)^2}(\sqrt{m\omega}x - p_2).
$$

Si consideramos el problema plano, tanto F_1 como F_2son generatrices de la transformación a variables Ángulo-Acción, donde $p_i \leftrightarrow J_i$ y $q_i \leftrightarrow \theta_i$. El Hamiltoniano transformado quedó en función solo de las variables de acción, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\vec{J}) = \omega J_1$, llegamos a que tanto J_1 como J_2 son constantes y $\theta_1 = \theta_{1_0} + \omega t$. Lo curioso es que la segunda variable ángulo no nos da información de una segunda frecuencia del sistema, es como que esta frecuencia se anuló. Esto a veces puede suceder cuando las frecuencias del sistema son degeneradas, tal como en nuestro caso.