Para encontrar la matriz de inercia primero voy a buscar la densidad superficial del disco. El área es πR^2, y por lo tanto $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$. Como los dos discos tienen masas distintas:

$$\rho_1 = \frac{M}{\pi R_1^2} \qquad \rho_2 = \frac{2M}{\pi R_2^2}$$

Calculo de la matriz de inercia Voy a calcular la matriz considerando ejes x, y, z centrados en el centro de masa de cada disco y con el eje z apuntando en la dirección del eje que uniría a los 2 discos y la masita luego en el giroscopio.

$$I_{yy} = \rho \int\int y^2 + \cancel{z^2} r dr d\theta = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 sin^2(\theta) dr d\theta = \frac{MR^2}{4}$$

Reemplazando para cada uno de los discos:

$$I_{xx_1} = \frac{MR_1^2}{4} \qquad I_{xx_2} = \frac{MR_2^2}{2}$$

$$I_{yy} = \rho \int\int x^2 + \cancel{z^2} r dr d\theta = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 cos^2(\theta) dr d\theta = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_{yy_1} = \frac{MR_1^2}{4} \qquad I_{yy_2} = \frac{MR_2^2}{2}$$

$$I_{zz} = \rho \int\int x^2 + y^2 r dr d\theta = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta = \frac{MR^2}{2}$$

$$I_{zz_1} = \frac{MR_1^2}{4} \qquad I_{zz_2} = \frac{MR_2^2}{2}$$

Con el teorema de Steiner puedo expresar estas magnitudes respecto del punto de apoyo O del giroscopio, manteniendo los ejes paralelos.

$$\begin{cases} a_{x1} = 0 \\ a_{y1} = 0 \\ a_{z1} = -\frac{l}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{x2} = 0 \\ a_{y2} = 0 \\ a_{z2} = \frac{l}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{xm} = 0 \\ a_{ym} = 0 \\ a_{zm} = \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{xx_1}^{CM} = I_{xx_1}^{O} - M(\frac{l}{2})^2 \\ I_{yy_1}^{CM} = I_{yy_1}^{O} - M(\frac{l}{2})^2 \\ I_{zz_1}^{CM} = I_{zz_1}^{O} \end{cases} \qquad \begin{cases} I_{xx_2}^{CM} = I_{xx_2}^{O} - 2M(\frac{l}{4})^2 \\ I_{yy_2}^{CM} = I_{yy_2}^{O} - 2M(\frac{l}{4})^2 \\ I_{zz_2}^{CM} = I_{zz_2}^{O} \end{cases}$$

Para la masita calculo su inercia como la de una masa puntual a $l/2$ del punto O.

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \frac{MR_1^2}{4} + \frac{MR_2^2}{2} + 3M\frac{l^2}{8} + m(\frac{l}{2})^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR_1^2}{4} + \frac{MR_2^2}{2} + 3M\frac{l^2}{8} + m(\frac{l}{2})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR_1^2}{2} + MR_2^2 \end{pmatrix}$$

La velocidad del giroscopio puede describirse desde el sistema de referencia montado sobre O como:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\psi}\hat{3} = \\ &= \dot{\theta}(cos(\psi)\hat{1} - sin(\psi)\hat{2}) + \dot{\phi}(sin(\theta)sin(\psi)\hat{1} + sin(\theta)cos(\psi)\hat{2} + cos(\theta)\hat{3}) + \dot{\psi}\hat{3} \\ &= (\dot{\theta}cos(\psi) + \dot{\phi}sin(\theta)sin(\psi))\hat{1} + (\dot{\phi}sin(\theta)cos(\psi) - \dot{\theta}sin(\psi))\hat{2} + (\dot{\phi}cos(\theta) + \dot{\psi})\hat{3} \end{aligned}$$

Como la estoy expresando la energía cinética desde el punto O no hay T de traslación, y es puramente de rotación. Como está expresado desde los ejes principales de inercia:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}[\Omega_1^2 I + \Omega_2^2 I + \Omega_3^2 I_3]$$

Como el cuerpo tiene simetría de rotación y $I_1 = I_2$, puede comprobarse que al elevar al cuadrado los términos cruzados de $\hat{1}$ y $\hat{2}$ se anulan y que los senos y cosenos de ψ desparecen al quedar $sin^2(\psi) + cos^2(\psi)$. Por lo tanto la energía cinética queda:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}[I\dot{\theta}^2 + I\dot{\phi}^2 sin^2(\theta) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}cos(\theta))^2]$$

Antes de escribir el Lagrangiano voy a obtener la posición del centro de masa para expresar la energía potencial:

$$r_{cm} = \frac{-Ml/2 + 2Ml/4 + ml/2}{M + 2M + m}\hat{3}$$
$$r_{cm} = \frac{ml/2}{3M + m}\hat{3}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\Omega_1^2 I + \Omega_2^2 I + \Omega_3^2 I_3] - M_{Total} g r_{cm} cos(\theta)$$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\Omega_1^2 I + \Omega_2^2 I + \Omega_3^2 I_3] - mg\frac{l}{2}cos(\theta)$$

La energía potencial es únicamente la de la masita, lo cuál era de esperarse ya que los dos discos están balanceados.

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = I\ddot{\theta}$$
$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\right) = \dot{\phi}^2 sin(\theta)cos(\theta) - I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}cos(\theta))sin(\theta) + mg\frac{l}{2}sin(\theta)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = (Isin^2(\theta) + I_3cos^2(\theta))\ddot{\phi} + (I - I_3)\dot{\phi}\dot{\theta}sin(2\theta) + I_3\ddot{\psi}cos(\theta) - I_3\dot{\psi}\dot{\theta}sin(\theta)$$
$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\right) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) = \ddot{\psi} - \dot{\phi}\dot{\theta}sin(\theta) + \ddot{\phi}cos(\theta)$$
$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\right) = 0$$

Si se definen mediantes estas ecuaciones:

$$\ddot{\phi} = \frac{(I_3 - I)\dot{\phi}\dot{\theta}sin(2\theta) - I_3\ddot{\psi}cos(\theta) + I_3\dot{\psi}\dot{\theta}sin(\theta)}{(Isin^2(\theta) + I_3cos^2(\theta))} \tag{1}$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta}sin(\theta) + \ddot{\phi}cos(\theta) \tag{2}$$

Haciendo $-cos(\theta)(1) + (2)$ puede obtenerse la expresión para $\ddot{\psi}$ y haciendo $(1) + I_3 cos(\theta)(2)$ la expresión para $\ddot{\phi}$.

$$\ddot{\theta} = \frac{sin(\theta)}{I}\left[\dot{\phi}^2 cos(\theta)(I - I_3) - I_3\dot{\phi}\dot{\psi} + mg\frac{l}{2}\right] \tag{3}$$

$$\ddot{\phi} = \dot{\phi}\dot{\theta}\frac{cos(\theta)}{sin(\theta)}\frac{(I_3 - 2I)}{I} + \dot{\psi}\dot{\theta}\frac{1}{sin(\theta)}\frac{I_3}{I} \tag{4}$$

$$\ddot{\psi} = -\dot{\phi}\dot{\theta}\frac{cos^2(\theta)}{sin(\theta)}\frac{(I_3 - 2I)}{I} + \dot{\phi}\dot{\theta}sin(\theta) - \dot{\psi}\dot{\theta}\frac{cos(\theta)}{sin(\theta)}\frac{I_3}{I} \tag{5}$$

En estas expresiones está el seno de θ dividiendo pero este no puede anularse ya que θ no puede llegar a ser 0 o π.

Antes de linealizar voy a calcular las velocidades ante una precesión pura. En este caso no hay ni aceleración ni velocidad en la dirección de θ. Imponiendo esto en (4) y (5) puede verse que $\ddot{\psi}$ y $\ddot{\phi}$ quedan nulas. De (3) pueden obtenerse dos expresiones posibles para $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi}^2 cos(\theta)(I - I_3) - I_3\dot{\phi}\dot{\psi} + mg\frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{I_3\dot{\psi} \pm \sqrt{I_3^2\dot{\psi}^2 - 4(I - I_3)mg\frac{l}{2}}}{cos(\theta)(I - I_3)}$$

Ahora si, linealizando (3), (4), y (5), eliminando los términos cuadráticos en las velocidades y haciendo un desarrollo de Taylor de las funciones periódicas a orden cero puede tenerse las aceleraciones aproximadas. Para eso se hace uso del momento conservado $l_3 = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}cos(\theta)$.

$$\ddot{\theta} \approx \frac{sin(\theta_0)}{I}(mg\frac{l}{2} - l_3\dot{\phi})$$

$$\ddot{\phi} \approx \frac{l_3}{I}\dot{\theta}\frac{1}{sin(\theta_0)}$$

$$\ddot{\psi} \approx -\frac{l_3}{I}\dot{\theta}\frac{cos(\theta_0)}{sin(\theta_0)}$$

$$I\ddot{\theta} + sin(\theta_0)l_3\dot{\phi} = mg\frac{l}{2}sin(\theta) \tag{6}$$

$$Isin(\theta_0)\ddot{\phi} - l_3\dot{\theta} = 0 \tag{7}$$

Definiendo $\lambda = \theta - i\phi sin(\theta_0)$ y realizando $(7) - i$ (6) queda:

$$I(\ddot{\theta} - i\ddot{\phi}sin(\theta_0)) + il_3(\dot{\theta} - i\ddot{\phi}sin(\theta_0)) = mg\frac{l}{2}sin(\theta_0)$$

$$I\ddot{\lambda} + il_3\dot{\lambda} = mg\frac{l}{2}sin(\theta_0)$$

Esto es una EDO que puede resolverse como la suma de una solución homogénea más la particular. La homogénea es una combinación lineal de exponenciales con las raices del siguiente polinomio en el exponente:

$$Ix^2 + il_3 x = 0$$

Entonces, $\lambda_h(t) = Ae^{\frac{-il_3}{I}t} + B$.
La particular sale de plantear una solución con $\ddot{\lambda} = 0$.

$$il_3\dot{\lambda} = mg\frac{l}{2}sin(\theta_0)sin(\theta_0)$$

$$\implies \lambda_p(t) = -i\frac{mgl}{2l_3}sin(\theta_0)t + C'$$

Por simplicidad, definiendo $\omega_L = \frac{l_3}{I}$ y $\omega_P = \frac{mgl}{2l_3}$, la solución completa queda:

$$\lambda(t) = Ae^{-\omega_L t} - i\omega_P sin(\theta_0)t + C$$

$$\lambda(t) = asin(\theta_0)(cos(\omega_L t + \varphi_0) - isin(\omega_L t + \varphi_0)) - i\omega_P sin(\theta_0)t + c - idsin(\theta_0)$$

Describiendo explícitamente a A y C como constantes complejas, $A = \alpha e^{-i\varphi_0}$ y $C = a + ib$ la solución queda:

$$\lambda(t) = \alpha[cos(\omega_L t + \varphi_0) - isin(\omega_L t + \varphi_0)] - i\omega_p sin(\theta_0)t + a + ib$$

$$\lambda(t) = \alpha cos(\omega_L t + \varphi_0) + a - isin(\theta_0)[\frac{\alpha}{sin(\theta_0)}sin(\omega_L t + \varphi_0)] + \omega_P t - \frac{b}{sin(\theta_0)}]$$

$$\mathfrak{Re}(\lambda) = \alpha cos(\omega_L t + \varphi_0) + a$$

$$\frac{\mathfrak{Im}(\lambda)}{sin(\theta_0)} = \frac{\alpha}{sin(\theta_0)}sin(\omega_L t + \varphi_0)] + \omega_P t - \frac{b}{sin(\theta_0)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= \alpha cos(\omega_L t + \varphi_0) + a \\
\phi(t) &= \frac{\alpha}{sin(\theta_0)}sin(\omega_L t + \varphi_0)] + \omega_P t - \frac{b}{sin(\theta_0)} \\
\dot{\theta}(t) &= -\alpha\omega_L sin(\omega_L t + \varphi_0) \\
\dot{\phi}(t) &= \frac{\alpha\omega_L}{sin(\theta_0)}cos(\omega_L t + \varphi_0) + \omega_P
\end{aligned}$$

Reemplazando con las condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}(0) &= -\alpha\omega_L sin(\varphi_0) = 0 \\
&\implies \varphi_0 = 0 \\
\dot{\phi}(0) &= \frac{\alpha\omega_L}{sin(\theta_0)} + \omega_P = \omega_0 \\
&\implies \alpha = \frac{\omega_0 - \omega_p}{w_L} sin(\theta_0) \\
\theta(0) &= \frac{\omega_0 - \omega_p}{w_L} sin(\theta_0) + a = \theta_0 \\
&\implies a = \theta_0 - \frac{\omega_0 - \omega_p}{w_L} sin(\theta_0) \\
\phi(0) &= -\frac{b}{sin(\theta_0)} = 0 \\
&\implies b = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto las soluciones temporales quedan:

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &= \frac{\omega_0 - \omega_p}{w_L} sin(\theta_0)[cos(\omega_L t) - 1] + \theta_0 \\
\phi(t) &= \frac{\omega_0 - \omega_p}{w_L} sin(\omega_L t) + \omega_P t
\end{aligned}
$$

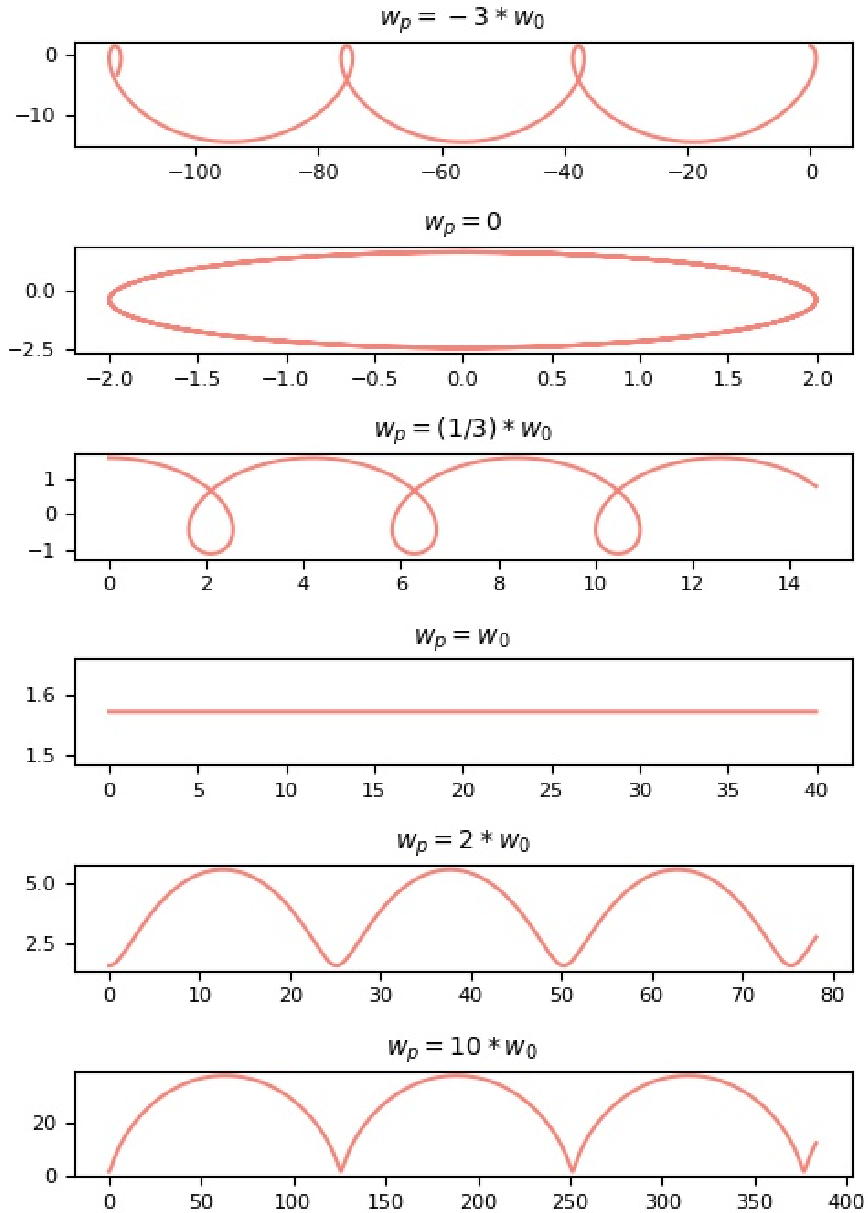

Figura 1: $\phi(t)\, vs\, \theta(t)$ para distintos w_p con respecto a w_0. Cuando son iguales se ve la precesión pura.