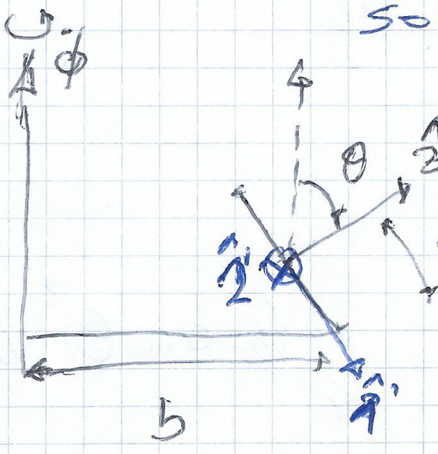
Lagrange

Moneda rodando sin deslizar sobre circunferencia de radio b en un plano.



$$\vec{\Omega} = \Omega_{1'}\hat{1}' + \Omega_{2'}\hat{2}' + \Omega_3\hat{3}$$

Rodadura:

$$\bar{V}_{CM} = \bar{\Omega} \times (-a\hat{1}') = (b - a\cos\theta)\dot{\phi}(-\hat{2}') + a\dot{\theta}\hat{3}$$

$$\bar{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\psi}\hat{3} + \dot{\theta}\hat{2}'$$

$$+\Omega_{2'} a\hat{3} - a\Omega_3(-\hat{2}') = (b-a\cos\theta)\dot{\phi}(-\hat{2}') + a\dot{\theta}\hat{3}$$

$b\dot{\phi} = -a\dot{\psi}$ iguales caminos recorridos $\iff$
$$\begin{cases} -a\Omega_3 = (b - a\cos\theta)\dot{\phi} = -a(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \\ \Omega_{2'} = +\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\Omega_{1'} = -\dot{\phi}\sin\theta.$$

En mi Lagrangiano no aparece $\dot{\psi}$ (por el vínculo).

Sabemos que: $\Omega_{1'}^2 + \Omega_{2'}^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$

$$\text{o sea } \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta.$$

$$T_{trasl} = \frac{M}{2}\left[(b - a\cos\theta)^2\dot{\phi}^2 + a^2\dot{\theta}^2\right]$$

$$T_{rot} = \frac{I}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}\frac{(b - a\cos\theta)^2\dot{\phi}^2}{a^2}$$

Usaremos q': $\begin{cases} I_1 = I_2 = I = \frac{Ma^2}{4} \\ I_3 = 2I = \frac{Ma^2}{2} \end{cases}$

$$T = \frac{M}{2}\left[(b-a\cos\theta)^2\dot\phi^2 + a^2\dot\theta^2\right]$$

$$+ \frac{Ma^2}{8}\left[\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\right] + \frac{M}{4}(b-a\cos\theta)^2\dot\phi^2$$

$$V = Mga\sin\theta$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\mathcal{L} = \frac{5Ma^2}{8}\dot\theta^2 + \frac{M}{8}\left[6(b-a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right]\dot\phi^2$$

$$- Mga\sin\theta$$

Conservación: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$

$$\Rightarrow p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} = \frac{M}{4}\left[6(b-a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right]\dot\phi = l$$

cte

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ y T es cuadrática homogénea de velocidades generalizadas y V no dep. de velocidades

$$\Rightarrow H = E = T + V$$

$$\frac{5Ma^2\dot\theta^2}{8} + \frac{M}{8}\left[6(b-a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right]\dot\phi^2 + Mga\sin\theta = E$$

despejamos $\dot{\phi}$ en E:

$$\frac{5Ma^2\dot{\theta}^2}{8} + \underbrace{\frac{2\ell^2}{M[6(b-a\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta]} + Mga\sin\theta}_{V_{ef}(\theta)} = E$$

Buscamos condición de equilibrio
$\theta = \theta_{eq}$ (órbita con θ constante)

$$\frac{\partial V_{ef}(\theta)}{\partial\theta} = 0$$

$$-\frac{2\ell^2[12(b-a\cos\theta)a\sin\theta + 2a^2\sin\theta\cos\theta]}{M[6(b-a\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta]^2} + Mga\cos\theta = 0$$

Usando la expresión de ℓ:

$$\frac{4\dot{\ell}^2\sin\theta\, a}{M}[6b-5a\cos\theta] = Mga\cos\theta$$

$$\dot{\phi}^2 = 4g\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{(6b-5a\cos\theta)}$$

Caso de interés: El CM no se mueve.

$\Rightarrow b = a\cos\theta$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{4g}{a\sin\theta}$$

$\dot{\phi}$ diverge cuando $\theta \to 0$

Como $\Omega_3 = 0$ $\Rightarrow$ $\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = 0$

$$\dot{\psi} = -\dot{\phi}\cos\theta.$$

$\vec{\Omega} \parallel \vec{\Theta}_{A}$

En un período $\tau = \frac{2\pi}{\dot{\phi}}$

La moneda da una vuelta

La cara a rotado:

$$\alpha = \dot{\psi}\tau = -2\pi\cos\theta$$

un ángulo de módulo menor que 2π

Existe una precesión $\Delta = 2\pi - 2\pi\cos\theta.$

$$\Delta = 2\pi(1-\cos\theta) > 0$$

la cara avanza en el sentido de la rotación.

Si $\theta \to 0$ $\Delta \to 0$, la cara parece ir dejando de rotar.