P2. (3 puntos) Dado el siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{[p_x - \alpha t^2(x-y)]^2}{2} + \frac{[p_y + \alpha t^2(x-y)]^2}{2} - \alpha t(x-y)^2$$

a) Plantear las ecuaciones de Hamilton correspondientes (no las resuelva).
b) Usando los corchetes de Poisson pruebe que la siguiente transformación *dependiente del tiempo* es canónica:

$$q_1 = x, \quad p_1 = p_x - \alpha t^2(x-y)\ , \quad q_2 = y, \quad p_2 = p_y + \alpha t^2(x-y)$$

c) Encuentre la función generatriz F_2 de la transformación canónica propuesta.
d) Escriba el nuevo hamiltoniano y resuelva las nuevas ecuaciones de Hamilton. Emplee esto para encontrar la solución general del problema original.

a) Plantear las ecuaciones de Hamilton correspondientes (no las resuelva).

$$H(x,y,p_x,p_y,t)=\frac{[p_x-\alpha t^2(x-y)]^2}{2}+\frac{[p_y+\alpha t^2(x-y)]^2}{2}-\alpha t(x-y)^2$$

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=p_x-\alpha t^2(x-y)$$

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=\alpha t[(p_x-p_y)t+2(x-y)(1-\alpha t^3)]$$

$$\dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y}=p_y+\alpha t^2(x-y)$$

$$\dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\alpha t[(p_x-p_y)t+2(x-y)(1-\alpha t^3)]$$

a) Plantear las ecuaciones de Hamilton correspondientes (no las resuelva).

b) Usando los corchetes de Poisson pruebe que la siguiente transformación *dependiente del tiempo* es canónica:

$$q_1 = x, \quad p_1 = p_x - \alpha t^2(x-y)\,, \quad q_2 = y, \quad p_2 = p_y + \alpha t^2(x-y)$$

Ver que los siguientes corchetes de Poisson respecto a las variables (x, y, p_x, p_y) cumplen:

$$[q_1, q_2]=0 \qquad [p_1, p_2]=0 \qquad [q_1, p_1]=1 \qquad [q_2, p_2]=1 \qquad [q_1, p_2]=0 \qquad [q_2, p_1]=0$$

$$[q_1, q_2]=[x, y]=0$$

$$[p_1, p_2]=[p_x-\alpha t^2(x-y), p_y+\alpha t^2(x-y)]=[p_x, p_y]+[p_x, f]+[-f, p_y]+[-f, f]=[p_x, p_y]=0$$

$$f(x,y,t)=\alpha t^2(x-y) \qquad [p_x, f]=-\frac{\partial f}{\partial x}=-\alpha t^2 \qquad [-f, p_y]=-\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha t^2 \qquad [-f, f]=0$$

$$[q_1, p_1]=[x, p_x-\alpha t^2(x-y)]=[x, p_x]+[x, -f]=[x, p_x]=1 \qquad [x, f]=0$$

$$[q_2, p_2]=[y, p_y+\alpha t^2(x-y)]=[y, p_y]+[y, f]=[y, p_y]=1 \qquad [y, f]=0$$

$$[q_1, p_2]=[x, p_y+\alpha t^2(x-y)]=[x, p_y]+[x, f]=[x, p_y]=0$$

$$[q_2, p_1]=[y, p_x-\alpha t^2(x-y)]=[y, p_x]+[y, -f]=[x, p_x]=0$$

c) Encuentre la función generatriz F_2 de la transformación canónica propuesta.

$$F_2 = F_2(x, y, p_1, p_2, t)$$

$$p_x = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad q_1 = \frac{\partial F_2}{\partial p_1} \qquad \widetilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$p_y = \frac{\partial F_2}{\partial y} \qquad q_2 = \frac{\partial F_2}{\partial p_2}$$

Escribo p_x, p_y, q_1, q_2 H, en función de x,y,p_1,p_2,t:

$$p_x = p_1 + \alpha t^2 (x - y) \qquad q_1 = x$$

$$p_y = p_2 - \alpha t^2 (x - y) \qquad q_2 = y$$

$$H(x, y, p_x, p_y, t) = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - \alpha t (x - y)^2$$

$$F_2 = F_2(q, P)$$

$$dF_2 = p\,dq + Q dP - (H - \widetilde{H}) dt$$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

$$\widetilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

c) Encuentre la función generatriz F_2 de la transformación canónica propuesta.

$$F_2 = F_2(x, y, p_1, p_{2,} t)$$

1) $p_1 + \alpha t^2 (x-y) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$

2) $p_2 - \alpha t^2 (x-y) = \dfrac{\partial F_2}{\partial y}$

3) $x = \dfrac{\partial F_2}{\partial p_1}$

4) $y = \dfrac{\partial F_2}{\partial p_2}$

5) $\widetilde{H} = \dfrac{p_1^2}{2} + \dfrac{p_2^2}{2} - \alpha t (x-y)^2 + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}$

3) $F_2 = x p_1 + h(x, y, p_{2,} t) \xrightarrow{\textbf{4)}\ \frac{\partial h}{\partial p_2} = y} h = p_2 y + g(x, y, t) \xrightarrow{\textbf{1),2)}\ \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = \alpha t^2 (x-y)}$

$$\longrightarrow g(x, y, t) = \alpha t^2 \frac{(x-y)^2}{2} \longrightarrow \boxed{F_2(x, y, p_1, p_2, t) = x p_1 + y p_2 + \alpha t^2 \frac{(x-y)^2}{2}}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \alpha t (x-y)^2 \xrightarrow{\textbf{5)}} \widetilde{H} = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2}$$

d) Escriba el nuevo hamiltoniano y resuelva las nuevas ecuaciones de Hamilton. Emplee esto para encontrar la solución general del problema original.

$$\widetilde{H}=\frac{p_1^2}{2}+\frac{p_2^2}{2}$$

En estas nuevas variables canónicas H no depende explicitamente del tiempo, se conserva, y las variables q_1, q_2 son cíclicas por lo que se conserva p_1, p_2.

$$\dot{q}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=p_1 \qquad \dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=0$$

$$\dot{q}_2=\frac{\partial H}{\partial p_2}=p_2 \qquad \dot{p}_2=-\frac{\partial H}{\partial q_2}=0$$

$$q_1(t)=p_{1o}t+q_{1o} \qquad p_1=cte=p_{1o}$$

$$q_2(t)=p_{2o}t+q_{20} \qquad p_2=cte=p_{2o}$$

La solución general del problema original:

$$x(t)=p_{xo}t+x_o \qquad p_x(t)=p_{xo}+\alpha t^2(x-y)$$

$$y(t)=p_{yo}t+y_o \qquad p_y(t)=p_{yo}-\alpha t^2(x-y)$$

$$x_o=q_{1o} \qquad p_{xo}=p_{1o}$$

$$y_o=q_{2o} \qquad p_{yo}=p_{2o}$$