# Guía 5: Cuerpo Rígido

Mecánica Clásica
$2^{\text{do}}$ Cuatrimestre de 2020
Sebastián E. Nuza

## Ejercicio 14

Utilizando las *ecuaciones de Euler* muestre que cuando un cuerpo rígido (CR) rota alrededor de un eje con momento de inercia máximo o mínimo, su movimiento es relativamente estable, mientras que cuando lo hace alrededor del eje de momento intermedio el movimiento es inestable.

Bueno, antes de empezar recordemos de dónde salían las *ecuaciones de Euler*.

**Repaso**: Sabemos que si $O$ es un punto fijo en un *sistema inercial* $S$ o el centro de masa (CM) de un cuerpo siempre podemos escribir

$$\left.\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}\right|_S = \boldsymbol{\tau}_O^{\text{ext}}$$

La relación entre un sistema $S$ *fijo al espacio* y otro $S'$ que *rota con el cuerpo* es[a]

$$\left.\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}\right|_{S'} + \left.\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{L}_O\right|_{S'} \tag{1}$$

Tomando los *ejes principales de inercia* para los versores fijos al cuerpo $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$, usando que el momento angular desde $O$ en esa base es

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{I}_O\,\boldsymbol{\Omega} = I_{O,1}\Omega_1\,\hat{\mathbf{1}} + I_{O,2}\Omega_2\,\hat{\mathbf{2}} + I_{O,3}\Omega_3\,\hat{\mathbf{3}} \qquad \left(\Rightarrow\ \left.\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}\right|_{S'} = \mathbf{I}_O \left.\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right|_{S'}\right)$$

y reemplazando en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\tau_{O,1}^{\text{ext}} &= I_{O,1}\dot{\Omega}_1 + (I_{O,3} - I_{O,2})\,\Omega_2\Omega_3 \\
\tau_{O,2}^{\text{ext}} &= I_{O,2}\dot{\Omega}_2 + (I_{O,1} - I_{O,3})\,\Omega_1\Omega_3 \\
\tau_{O,3}^{\text{ext}} &= I_{O,3}\dot{\Omega}_3 + (I_{O,2} - I_{O,1})\,\Omega_1\Omega_2
\end{aligned}$$

Estas son las llamadas *ecuaciones de Euler* y valen siempre que el punto $O$ sea igual a un punto fijo del CR o su centro de masa (CM). Notar que los términos $(I_i - I_j)\,\Omega_i\Omega_j$ aparecen como resultado de la rotación del sistema de ejes fijo al cuerpo respecto de uno *fijo al espacio*.

[a] Como ya vimos varias veces usamos el *teorema de la derivada relativa* para transformar derivadas entre sistemas fijos y rotantes.

Volvamos ahora al problema. La idea es entonces estudiar el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio uniforme y analizar la estabilidad de su rotación si inicialmente gira alrededor de un *eje principal de inercia*. Para escribir las ecuaciones de Euler elegimos como punto de referencia al CM del cuerpo que es donde está aplicado el peso. En ese caso, las tres componentes del torque serán nulas y se simplifica el sistema de ecuaciones, es decir

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\Omega_2\Omega_3 = 0 \\ I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\Omega_1\Omega_3 = 0 \\ I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\Omega_1\Omega_2 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Supongamos ahora que la velocidad angular del CR es casi paralela a uno de los ejes principales, digamos al eje 1, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \Omega_0 + w_1(t) \\ \Omega_2(t) &= w_2(t) \\ \Omega_3(t) &= w_3(t) \end{aligned}$$

en donde $|w_i| \ll |\Omega_0|$ son perturbaciones en las distintas componentes de la velocidad angular. O sea, lo que estamos diciendo es que la velocidad angular *inicial* será, esencialmente, $\mathbf{\Omega} \simeq \Omega_0\,\hat{\mathbf{1}}$. Si reemplazamos las velocidades angulares $\Omega_i(t)$ en el sistema de ecuaciones (2) obtenemos

$$\begin{aligned} I_1\dot{w}_1 + (I_3 - I_2)\,w_2(t)w_3(t) = 0 \\ I_2\dot{w}_2 + (I_1 - I_3)\,(\Omega_0 + w_1(t))\,w_3(t) = 0 \\ I_3\dot{w}_3 + (I_2 - I_1)\,(\Omega_0 + w_1(t))\,w_2(t) = 0 \end{aligned}$$

Como los términos $w_iw_j \sim \mathcal{O}(w^2)$ son perturbaciones de orden superior los podemos despreciar. En ese caso el sistema queda

$$I_1\dot{w}_1 = 0 \;\Rightarrow\; w_1(t) = \text{constante} \;\Rightarrow\; \Omega_1 \simeq \Omega_0 \tag{3}$$

$$I_2\dot{w}_2 + (I_1 - I_3)\,\Omega_0 w_3(t) = 0 \tag{4}$$

$$I_3\dot{w}_3 + (I_2 - I_1)\,\Omega_0 w_2(t) = 0 \tag{5}$$

Derivando (4) y reemplazando en (5) obtenemos

$$\boxed{\ddot{w}_2(t) + \omega^2 w_2(t) = 0} \tag{6}$$

en donde $\omega^2 \equiv \Omega_0^2(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)/I_2I_3$. Si $\omega^2 > 0$ la solución para $w_2(t)$ será oscilatoria (queda la ecuación de un oscilador armónico).

De la ecuación (4) es fácil ver que si la función $w_2(t)$ es oscilatoria, entonces $w_3(t)$ también lo es. En consecuencia, si tanto $w_2(t)$ como $w_3(t)$ son funciones del tiempo acotadas, las componentes 2 y 3 de la velocidad angular permanecerán chicas y el movimiento será estable. Entonces, el cuerpo rotará, aproximadamente, alrededor del eje 1 durante todo el movimiento. Por el contrario, si $\omega^2 < 0$ las soluciones $w_{2,3}(t)$ divergen con el tiempo y el vector velocidad angular total se apartará del eje 1 desarrollando un comportamiento más complejo.

**Nota**: ¡Ojo! Las soluciones que encontramos son válidas únicamente mientras $|w_i| \ll |\Omega_0|$.

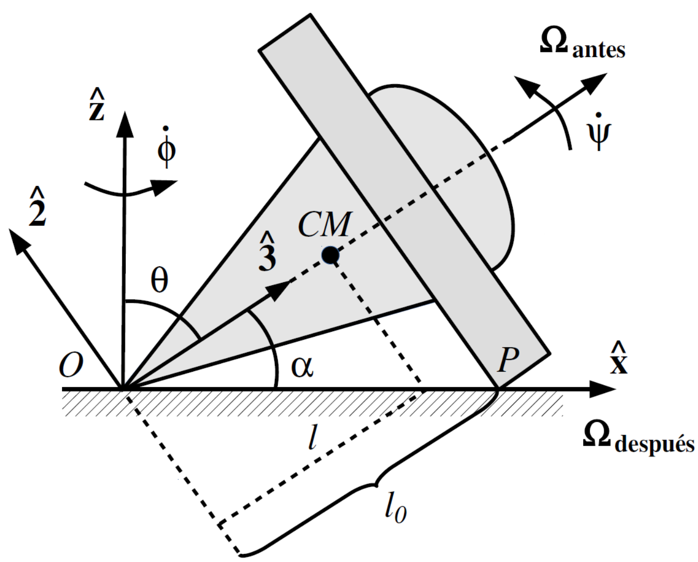
Veamos todos los casos posibles:

- Si $I_1 > I_2 > I_3 \;\Rightarrow\; \omega^2 > 0$ (estable): el momento de inercia $I_1$ es **máximo**.
- Si $I_1 < I_2 < I_3 \;\Rightarrow\; \omega^2 > 0$ (estable): el momento de inercia $I_1$ es **mínimo**.
- Si $I_2 > I_1 > I_3 \;\Rightarrow\; \omega^2 < 0$ (inestable): el momento de inercia $I_1$ es **intermedio**.
- Si $I_3 > I_1 > I_2 \;\Rightarrow\; \omega^2 < 0$ (inestable): el momento de inercia $I_1$ es **intermedio**.

Los últimos dos casos representan la misma situación física.

## Ejercicio 17

Un trompo con un punto de apoyo fijo $O$ que inicialmente gira alrededor de un eje con velocidad angular $\Omega_0$ (la velocidad de precesión es despreciable) toca el piso y casi instantáneamente (debido al rozamiento) pasa a rodar sin deslizar. Hay gravedad en $-\hat{\mathbf{z}}$.




<u>Fuerzas aplicadas:</u> Fuerza de vínculo en $O$ ($F_v$), Peso ($m\mathbf{g}$), Normal en $P$ ($N$), Rozamiento en $P$ ($F_r$).

$a$) Mostrar que la componente de $\mathbf{L}_O$ en la dirección $OP$ se conserva durante el choque.

$i$) Torques *antes* de tocar el piso:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}^O_{F_v} &= 0 \\
\boldsymbol{\tau}^O_{m\mathbf{g}} &= \mathbf{r}_{CM,O} \wedge mg\,\hat{\mathbf{z}} = l\,\hat{\mathbf{3}} \wedge -mg\,\hat{\mathbf{z}} \\
&= l\,(\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\alpha\,\hat{\mathbf{z}}) \wedge -mg\,\hat{\mathbf{z}} = mgl\cos\alpha\,\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}^O_{\text{antes}}(\hat{\mathbf{y}}) = \boldsymbol{\tau}^O_{F_v} + \boldsymbol{\tau}^O_{m\mathbf{g}}}$$

$ii$) Torques *después* de tocar el piso:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}^O_{F_v} &= 0 \\
\boldsymbol{\tau}^O_{m\mathbf{g}} + \boldsymbol{\tau}^O_{N} &= mgl\cos\alpha\,\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{r}_{P,O} \wedge N\,\hat{\mathbf{z}} = \left(mgl\cos\alpha - \frac{l_0 N}{\cos\alpha}\right)\hat{\mathbf{y}} \\
\boldsymbol{\tau}^O_{F_r} &= \mathbf{r}_{P,O} \wedge F_r\,\hat{\mathbf{y}} = \frac{l_0 F_r}{\cos\alpha}\,\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}^O_{\text{después}}(\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{z}}) = \boldsymbol{\tau}^O_{F_v} + \boldsymbol{\tau}^O_{m\mathbf{g}} + \boldsymbol{\tau}^O_{N} + \boldsymbol{\tau}^O_{F_r}}$$

Los torques sobre el cuerpo no tienen componente $x$ durante toda la evolución:

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{\tau}^O_{x,\text{antes}} = \boldsymbol{\tau}^O_{x,\text{después}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{L}_O\cdot\hat{\mathbf{x}} = L_{O,x} = \text{ constante}}$$

$b$) Ahora nos piden calcular con qué velocidad angular rotará el trompo alrededor del nuevo *eje instantáneo de rotación* una vez que empieza a rodar sin deslizar.

• Para encontrar la velocidad angular del trompo después del choque vamos a usar la conservación de la componente $x$ del momento angular. Para hacer la cuenta vamos a suponer que conocemos el tensor de inercia medido desde el sistema de ejes $1, 2, 3$ *centrado en el CM* (los momentos de inercia dependerán de la forma exacta del trompo. Por ejemplo, ver el Ejercicio 3a).

$$\mathbf{I}_{CM} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

En esta última igualdad usamos que nuestro trompo es *simétrico* ($I_1 = I_2 \equiv I$).

Como el momento angular lo estamos midiendo desde el punto fijo $O$ necesitamos transformar el tensor de inercia usando el *teorema de Steiner* para los ejes 1 y 2 del trompo. Para el eje 3 el momento de inercia vale lo mismo ya que nos estamos moviendo sobre la línea que une los puntos $O$ y CM. Como sabemos, el resultado es

$$\boxed{\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} I + ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & I + ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}}$$

• Justo *antes* de tocar el piso *toda* la velocidad angular del trompo está en el eje principal $\hat{\mathbf{3}}$ ($\dot{\psi}$) ya que la precesión ($\dot{\phi}$) es despreciable, es decir:

$$\mathbf{\Omega}_{\text{antes}} = \Omega_0\,\hat{\mathbf{3}}$$

Ya tenemos todo para calcular $\mathbf{L}_O = \mathbf{I}_O\mathbf{\Omega}$ antes del choque:

$$\mathbf{L}_O^{\text{antes}} = \begin{pmatrix} I+ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & I+ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3\Omega_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_O^{\text{antes}} = I_3\Omega_0\,\hat{\mathbf{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{L}_O^{\text{antes}} = I_3\Omega_0\,(\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\alpha\,\hat{\mathbf{z}})}$$

• Justo *después* de tocar el piso el *eje instantáneo de rotación* estará en la dirección $OP$ ya que $\mathbf{v}_O = 0$ y, por condición de rodadura, vale que $\mathbf{v}_P = 0$, entonces

$$\mathbf{\Omega}_{\text{después}} = \Omega\,\hat{\mathbf{x}} = \Omega\,\left(\cos\alpha\,\hat{\mathbf{3}} - \sin\alpha\,\hat{\mathbf{2}}\right)$$

Por otro lado,

$$\mathbf{L}_O^{\text{después}} = \begin{pmatrix} I+ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & I+ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega\sin\alpha \\ \Omega\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(I+ml^2)\,\Omega\sin\alpha \\ I_3\Omega\,\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_O^{\text{después}} = -(I+ml^2)\,\Omega\sin\alpha\,\hat{\mathbf{2}} + I_3\Omega\cos\alpha\,\hat{\mathbf{3}}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{L}_O^{\text{después}} = -(I+ml^2)\,\Omega\sin\alpha\left(\cos\alpha\,\hat{\mathbf{z}} - \sin\alpha\,\hat{\mathbf{x}}\right) + I_3\Omega\cos\alpha\left(\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\alpha\,\hat{\mathbf{z}}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{L}_O^{\text{después}} = \left((I+ml^2)\sin^2\alpha + I_3\cos^2\alpha\right)\hat{\mathbf{x}} + \Omega\sin\alpha\cos\alpha\left(I_3 - I - ml^2\right)\,\hat{\mathbf{z}}}$$

Finalmente, si igualamos $\mathbf{L}_O^{\text{antes}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{L}_O^{\text{después}}\cdot\hat{\mathbf{x}}$ podemos despejar $\Omega$, por lo que

$$\boxed{\mathbf{\Omega}_{\text{después}} = \Omega\,\hat{\mathbf{x}} = \left(\frac{I_3\cos\alpha}{(I+ml^2)\sin^2\alpha + I_3\cos^2\alpha}\right)\Omega_0\,\hat{\mathbf{x}}} \tag{7}$$

Por último, es importante mencionar que $|\mathbf{\Omega}_{\text{después}}|$ = constante. Esto implica que las velocidades angulares alrededor del eje $z$ ($\dot{\phi}$) y el eje 3 ($\dot{\psi}$) también lo serán, tal como vamos a demostrar en el siguiente inciso.

$c$) Escribir las ecuaciones de Euler (en términos de los ángulos de Euler) una vez que el trompo empieza a rodar. Calcular el valor de la fuerza de rozamiento.

Para poder escribir las ecuaciones de Euler necesitamos conocer los torques externos desde $O$ y proyectarlos en el sistema de ejes $1, 2, 3$. La cuenta del torque ya la hicimos antes. El resultado que obtuvimos *justo después* de que el trompo toque el piso es

$$\boldsymbol{\tau}_O^{\text{ext}} = \left( mgl\cos\alpha - \frac{l_0 N}{\cos\alpha} \right) \hat{\mathbf{y}}' + \frac{l_0 F_r}{\cos\alpha} \hat{\mathbf{z}}', \tag{8}$$

en donde usamos versores primados para diferenciarlos del sistema fijo al espacio $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$.

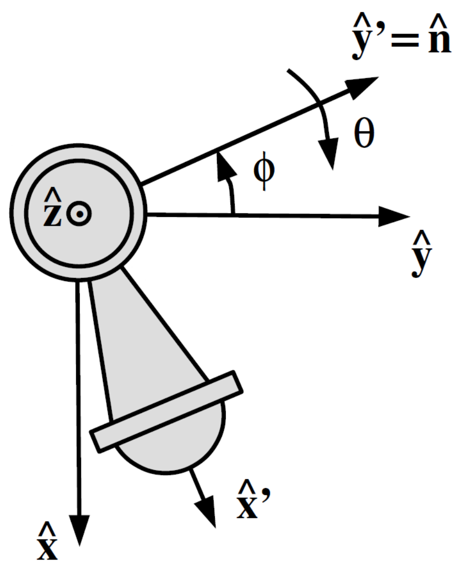



Figura: Vista superior del trompo. Se muestran 2 de las 3 rotaciones sucesivas que generan los ángulos de Euler: 1) alrededor del eje $z$ ($\dot{\phi} \neq 0$ con $\theta = 0, \psi = 0$) y 2) alrededor del eje $y'$ ($\dot{\theta} \neq 0$ con $\phi = \phi_0, \psi = 0$). Este último eje corresponde a la *línea de nodos*.

Como nos piden escribir la solución en términos de los ángulos de Euler hay que tener en cuenta un detalle. Si imaginamos que el sistema de ejes fijo al cuerpo está caracterizado por los ángulos de Euler $\phi$, $\theta$ y $\psi = 0$ respecto del sistema de ejes $x, y, z$ es fácil ver que el nuevo versor rotado $\hat{\mathbf{y}}'$ corresponde a la *línea de nodos* $\hat{\mathbf{n}}$ (ver Figura), entonces

$$\hat{\mathbf{y}}' \equiv \hat{\mathbf{n}} \;\Rightarrow\; \hat{\mathbf{n}} = \cos\psi\, \hat{\mathbf{1}} - \sin\psi\, \hat{\mathbf{2}} \qquad \text{(ver también el pdf de Maxi)} \tag{9}$$

Ahora nos falta escribir el versor $\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}}$ como función de los versores $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}}$. Esto lo pueden hacer a partir de las matrices de rotación pero también lo pueden ver, por ejemplo, mirando con cuidado la Figura 4.7 del Goldstein y proyectando $\hat{\mathbf{z}}$ en los ejes respectivos. El resultado es

$$\hat{\mathbf{z}}' = \cos\theta\, \hat{\mathbf{3}} + \sin\theta \left( \sin\psi\, \hat{\mathbf{1}} + \cos\psi\, \hat{\mathbf{2}} \right) \tag{10}$$

Reemplazando (9) y (10) en (8) ya podemos escribir el torque en la base de versores fijos al cuerpo que es lo que necesitamos para las ecuaciones de Euler. Notar que la componente del torque en la dirección $\hat{\mathbf{3}}$ tiene información sobre la fuerza de rozamiento que nos interesa. Específicamente, esta componente resulta

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{O,3}^{\text{ext}} = \frac{l_0 F_r \cos\theta}{\cos\alpha}\,\hat{\mathbf{3}} = l_0 F_r \tan\alpha\,\hat{\mathbf{3}}} \tag{11}$$

en donde usamos que $\cos\theta = \sin\alpha$ ya que $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Ahora necesitamos escribir el vector velocidad angular en función de los **ángulos de Euler** en la base $1, 2, 3$. Sabiendo que

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\,\hat{\mathbf{z}}' + \dot{\psi}\,\hat{\mathbf{3}} \tag{12}$$

y, usando la ecuación (10), obtenemos

$$\boldsymbol{\Omega}(\phi,\theta,\psi) = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi\,\hat{\mathbf{1}} + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi\,\hat{\mathbf{2}} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\,\hat{\mathbf{3}}.$$

Esta expresión es un caso particular ($\dot{\theta} = 0$) de la velocidad angular escrita en la base del cuerpo como función de los ángulos de Euler que ya vimos las clases pasadas.

<u>**Nota**</u>: Vamos a demostrar que $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes.

La condición de rodadura implica

$$R\psi = -D\phi \;\Rightarrow\; \phi = -\underbrace{\frac{R}{D}}_{\sin\alpha}\,\psi \;\Rightarrow\; \dot{\phi} = -\sin\alpha\,\dot{\psi} \tag{13}$$

en donde $R$ es el radio máximo del trompo y $D$ es el largo de la recta $OP$. El signo se debe a que cuando uno de los ángulos crece el otro disminuye. Para verlo piensen en la regla de la mano derecha para $\phi$ y $\psi$ durante la rodadura.

La ecuación (12) se puede escribir como

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\,\hat{\mathbf{z}}' + \dot{\psi}\left(\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}}' + \sin\alpha\,\hat{\mathbf{z}}'\right).$$

Reemplazando la condición de rodadura para $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\dot{\psi})$ que acabamos de obtener queda

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}}' = \Omega\,\hat{\mathbf{x}}' \;\Rightarrow\; \dot{\psi} = \frac{\Omega}{\cos\alpha} = \text{constante} \;\Rightarrow\; \dot{\phi} = -\Omega\tan\alpha = \text{constante}. \tag{14}$$

En la segunda igualdad usamos que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{\text{después}}$ dado por la ecuación (7).

Volviendo a la ecuación para $\boldsymbol{\Omega}(\phi,\theta,\psi)$ y usando la condición de rodadura llegamos a la siguiente expresión para la velocidad angular[1]

$$\boldsymbol{\Omega}(\phi,\alpha,\psi)=\dot\phi\cos\alpha\sin\psi\,\hat{\mathbf{1}}+\dot\phi\cos\alpha\cos\psi\,\hat{\mathbf{2}}+\dot\phi\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,\hat{\mathbf{3}}$$

Como $\ddot\phi=\ddot\psi=0$ entonces

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}|_{S'}=\dot\Omega_1\,\hat{\mathbf{1}}+\dot\Omega_2\,\hat{\mathbf{2}}+\dot\Omega_3\,\hat{\mathbf{3}}=\dot\phi\dot\psi\cos\alpha\,(\cos\psi\hat{\mathbf{1}}-\sin\psi\hat{\mathbf{2}})\;\Rightarrow\;\boxed{\dot\Omega_3=0}$$

Finalmente, ya podemos escribir las ecuaciones de Euler que estábamos buscando. Teniendo en cuenta que $I_1=I_2=I$ obtenemos

$$\tau^{\text{ext}}_{O,1}=I\dot\Omega_1+(I_3-I)\,\Omega_2\Omega_3 \tag{15}$$
$$\tau^{\text{ext}}_{O,2}=I\dot\Omega_2+(I-I_3)\,\Omega_1\Omega_3 \tag{16}$$
$$\tau^{\text{ext}}_{O,3}=I_3\dot\Omega_3 \tag{17}$$

Les queda a ustedes de ejercicio terminar de escribir las ecuaciones (15) y (16) que involucran el peso y la normal en términos de los ángulos de Euler y demás parámetros del problema (solo tienen que reemplazar). Para determinar la fuerza de rozamiento que piden en el ejercicio usamos el torque (11) y que $\dot\Omega_3=0$ en la ecuación (17):

$$l_0F_r\tan\alpha=0\;\Leftrightarrow\;\boxed{F_r=0}$$

• En el último punto piden calcular cuánto tarda el trompo en dar una vuelta completa alrededor del punto $O$. La cuenta ya está prácticamente hecha. Les queda a ustedes terminar los detalles. *Ayuda:* vean la ecuación (14).

[1] Recordar que $\sin\theta=\cos\alpha$ y $\cos\theta=\sin\alpha$.