Guía 6: Corchetes de Poisson

Mecánica Clásica
2^{do} Cuatrimestre de 2020
Sebastián E. Nuza

Motivación física:

Para entender cuál es el origen de los llamados **corchetes de Poisson** consideremos una función arbitraria $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, en donde $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_N)$ representa a las N coordenadas generalizadas y $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_N)$ a sus momentos canónicos conjugados. El "par ordenado" $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ determina un punto en el **espacio de fases**. Si queremos estudiar cómo evoluciona temporalmente esta función a medida que el sistema físico se mueve en el espacio de fases tenemos que calcular

$$\dot{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \tag{1}$$

Las *ecuaciones de Hamilton* vienen dadas por

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

Reemplazando $\dot{q}_i$ y $\dot{p}_i$ en (1) se obtiene

$$\dot{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \equiv [f, \mathcal{H}]_{q,p}$$

en donde hemos definido el *corchete de Poisson* entre la función f y el Hamiltoniano $\mathcal{H}$. Análogamente, el corchete de Poisson entre dos funciones arbitrarias f y g se puede definir como

$$\boxed{[f, g]_{q,p} \equiv \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)} \tag{2}$$

El significado físico de los corchetes de Poisson trasciende la mera economía operativa ya que tiene implicancias profundas para el estudio de las simetrías y conservaciones. Además, resulta ser el análogo clásico del *conmutador* en Mecánica Cuántica.

Notar que usando la definición (2) es posible escribir las ecuaciones de Hamilton en forma compacta:

$$\boxed{\dot{q}_i = [q_i, \mathcal{H}]}$$

$$\boxed{\dot{p}_i = [p_i, \mathcal{H}]}$$

<u>Constantes de movimiento:</u> Supongamos ahora que la función f que consideramos anteriormente depende explícitamente del tiempo:

$$f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{f} = [f, \mathcal{H}] + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Notar que:

- Si C es una *constante de movimiento* $\Rightarrow$ $\dot{C} = 0 \;\Leftrightarrow\; [C, \mathcal{H}] = -\frac{\partial C}{\partial t}$
- Si C no depende explícitamente del tiempo $\Rightarrow$ $[C, \mathcal{H}] = 0$
- Si C_1 y C_2 son *constantes de movimiento* que no dependen explícitamente del tiempo $\Rightarrow$

  $[C_1, C_2] =$ constante (**Ejercicio 13 (a)**: demostrar usando la identidad de Jacobi[a])

[a] $[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$

Transformaciones Canónicas: Una TC: $(q, p) \to (Q, P)$ es tal que las variables transformadas cumplen las ecuaciones de Hamilton:

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}} \qquad \boxed{\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}} \qquad \boxed{K = \mathcal{H} + \frac{\partial F_i}{\partial t}}$$

en donde K es el Hamiltoniano transformado y F_i se conoce con el nombre de **función generatriz** que, según sea el caso, viene dada por

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}): \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$$

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}): \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

$$F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}): \quad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$$

$$F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}): \quad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$$

Ejercicio 8:

(a) Pruebe que si se hace una transformación canónica $(q,p) \to (Q,P)$ se tiene que:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_l} = \frac{\partial p_l}{\partial P_i} \qquad \frac{\partial Q_i}{\partial p_l} = -\frac{\partial q_l}{\partial P_i}$$
$$\frac{\partial q_l}{\partial Q_i} = \frac{\partial P_i}{\partial p_l} \qquad \frac{\partial p_l}{\partial Q_i} = -\frac{\partial P_i}{\partial q_l}$$

Siempre podemos escribir las variables transformadas en función de las originales, entonces

$$Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \;\Rightarrow\; \dot{Q}_i = \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial Q_i}{\partial p_l}\dot{p}_l \right)$$

Usando las ecuaciones de Hamilton en la expresión anterior obtenemos

$$\dot{Q}_i = \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_l}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_l}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_l} \right) \tag{3}$$

Por otro lado sabemos que $\dot{Q}_i$ debe verificar la ecuación canónica con el Hamiltoniano K:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \qquad \text{ya que} \qquad K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})) + \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial t}}_{=0} \qquad (F_i \neq F_i(t))$$

$$\Rightarrow\; \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial P_i} \right) \tag{4}$$

En la segunda igualdad estamos asumiendo que F_i no depende explícitamente del tiempo, que es la situación más común con la que nos vamos a encontrar en los problemas. Igualando las ecuaciones (3) y (4) es fácil ver que

$$\boxed{\frac{\partial Q_i}{\partial q_l} = \frac{\partial p_l}{\partial P_i}} \qquad \boxed{\frac{\partial Q_i}{\partial p_l} = -\frac{\partial q_l}{\partial P_i}}$$

De forma análoga, trabajando con la ecuación de Hamilton para $\dot{P}_i$, ustedes pueden demostrar las otras dos identidades que faltan.

Corchetes Fundamentales:

Podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Cuánto valen los corchetes de Poisson entre las variables q_i y p_i? Es fácil verificar que todo par de **variables canónicas** deben cumplir las siguientes relaciones de conmutación:

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$$
$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}$$

Estas igualdades se conocen con el nombre de **corchetes fundamentales** y son ciertas *para todo par de variables canónicas*. Veamos que efectivamente es así. Para eso evaluemos los corchetes fundamentales entre las variables transformadas Q_i y P_j:

$$[Q_i, P_j]_{q,p} \equiv \sum_{l=0}^{N} \left(\underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial q_l}}_{\frac{\partial p_l}{\partial P_i}} \frac{\partial P_j}{\partial p_l} - \underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial p_l}}_{-\frac{\partial q_l}{\partial P_i}} \frac{\partial P_j}{\partial q_l} \right) = \sum_{l=0}^{N} \left(\frac{\partial P_j}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial P_i} + \frac{\partial P_j}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial P_i} \right) = \frac{\partial P_j}{\partial P_i} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{[Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij}}$$

Análogamente, ustedes pueden mostrar que

$$\boxed{[Q_i, Q_j]_{q,p} = 0} \qquad \boxed{[P_i, P_j]_{q,p} = 0}$$

Notar que los corchetes fundamentales para las "variables transformadas" Q_i y P_i los calculamos respecto de las "variables originales" q_i y p_i. Sin embargo, ya vimos que lo mismo vale si hubiésemos calculado los corchetes entre las Q_i y P_i usando las mismas variables.

Esto último nos sugiere el siguiente resultado importante:

Propiedad: Los corchetes de Poisson son *invariantes* frente a TCs: $(q, p) \to (Q, P)$

Vamos a demostrar que esta propiedad es válida en general. Para hacerlo consideremos el corchete de Poisson entre las funciones arbitrarias $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y veamos que obtenemos:

$$[f, g]_{q,p} = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{5}$$

Como conocemos la relación entre variables originales y transformadas podemos escribir

$$\begin{aligned} f &= f(\mathbf{q}(\mathbf{Q},\mathbf{P}),\mathbf{p}(\mathbf{Q},\mathbf{P})) = \tilde{f}(\mathbf{Q},\mathbf{P}) \\ g &= g(\mathbf{q}(\mathbf{Q},\mathbf{P}),\mathbf{p}(\mathbf{Q},\mathbf{P})) = \tilde{g}(\mathbf{Q},\mathbf{P}) \end{aligned}$$

Desarrollando cada derivada parcial de la ecuación (5) mediante la regla de la cadena obtenemos

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{ \left(\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_i}+\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial q_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial g}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial g}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i}\right)-\right.$$

$$\left.\left(\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial p_i}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial p_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial g}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial g}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\right)\right\} =$$

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial Q_l}\frac{\partial g}{\partial Q_k}\underbrace{[Q_l,Q_k]_{q,p}}_{=0}+\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial Q_l}\frac{\partial g}{\partial P_k}\underbrace{[Q_l,P_k]_{q,p}}_{\delta_{lk}}+$$

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial P_l}\frac{\partial g}{\partial Q_k}\underbrace{[P_l,Q_k]_{q,p}}_{-\delta_{kl}}+\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial P_l}\frac{\partial g}{\partial P_k}\underbrace{[P_l,P_k]_{q,p}}_{=0}=$$

$$\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial Q_l}\frac{\partial g}{\partial P_l}-\frac{\partial f}{\partial P_l}\frac{\partial g}{\partial Q_l}\right)=[f,g]_{Q,P}$$

$$\Rightarrow \boxed{[f,g]_{q,p}=[f,g]_{Q,P}\equiv[f,g]}$$

Por lo tanto, no es necesario aclarar respecto de qué variables se calculan los corchetes. Este resultado es útil a la hora de calcular conservaciones ya que sabemos que si C es una constante de movimiento entonces $[C,\mathcal{H}]=0$, resultado que es invariante frente a TCs.

Transformación Canónica Infinitesimal:

Una manera de interpretar la evolución de un sistema mecánico es mediante una sucesión de TCs *infinitesimales* que equivalen a una única TC finita. La idea es pasar de las variables iniciales $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a variables finales $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ que *difieran poco de las originales* y que den cuenta de la evolución infinitesimal del sistema en el **espacio de fases**.

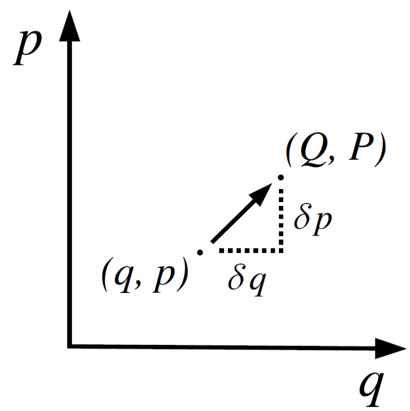

Figura: Evolución $(q, p) \to (q + \delta q, p + \delta p) = (Q, P)$ en el espacio de fases.

Para llevar a cabo la TC infinitesimal podemos utilizar la función generatriz de la **identidad** a la cual le sumamos una pequeña perturbación. Explícitamente,

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{N} q_i P_i + \epsilon G(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \quad (\epsilon \ll 1)$$

Usando las relaciones canónicas de transformación para F_2 se tiene

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$
$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

La evolución del sistema está caracterizada por el parámetro continuo ϵ que genera un incremento en las coordenadas generalizadas q_i y momentos conjugados p_i. Para fijar ideas podemos pensar que ϵ es, por ejemplo, un incremento temporal δt, cartesiano δx o angular $\delta\varphi$. Cualquiera de estos incrementos modificarán el estado del sistema.

Estas relaciones se pueden reescribir como

$$P_i - p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \equiv \delta p_i \qquad\qquad Q_i - q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \equiv \delta q_i$$

Sin embargo, a primer orden en ϵ, podemos aproximar

$$\epsilon\frac{\partial G}{\partial P_i} = \epsilon\frac{\partial G}{\partial(p_i+\delta p_i)} = \epsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}$$

Por lo tanto, las variaciones infinitesimales que llevan las variables originales a sus homólogas evolucionadas son

$$\boxed{\delta q_i = \epsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}} \qquad \boxed{\delta p_i = -\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}} \tag{6}$$

Se suele decir que G es la *función generatriz* de la TC infinitesimal en cuestión, aunque, formalmente, sabemos que la verdadera generatriz es la F_2 perturbada que usamos más arriba.

Simetría y Conservación:

Ya sabemos entonces como transformar nuestras variables en el espacio de fases mediante una TC infinitesimal. Ahora queremos estudiar como varia cualquier función $f = f(\mathbf{q},\mathbf{p})$ ante dicha transformación.

La variación de f será entonces

$$\delta f = f(\mathbf{Q},\mathbf{P}) - f(\mathbf{q},\mathbf{p}) = f(\mathbf{q}+\delta\mathbf{q},\mathbf{p}+\delta\mathbf{p}) - f(\mathbf{q},\mathbf{p})$$

Si desarrollamos a primer orden $f(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ alrededor de $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ y usamos (6) se obtiene que

$$\delta f = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\delta p_i\right) = \epsilon\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)$$

$$\Rightarrow\ \delta f = \epsilon[f,G]$$

Si elegimos $f = \mathcal{H}$ entonces

$$\boxed{\delta\mathcal{H} = \epsilon[\mathcal{H},G]} \tag{7}$$

Esta ecuación nos dice que la variación $\delta\mathcal{H}$ del Hamiltoniano está relacionada con el corchete de Poisson entre el Hamiltoniano y la "función generatriz" de transformación G. Por lo que vimos arriba sabemos que si G es una constante de movimiento que no depende explícitamente del tiempo entonces $[\mathcal{H},G] = 0$. Por lo tanto, este resultado no es otra cosa más que un re-enunciado del **Teorema de Noether** que vimos en la Guía 3.

Para interpretar el **Ejercicio 12** van a tener que usar estos conceptos:

$$\boxed{\exists \text{ simetrías continuas tal que } \delta\mathcal{H} = 0} \ \Leftrightarrow \ \boxed{\exists \text{ constantes de movimiento } G \neq G(t) \text{ tal que } [\mathcal{H}, G] = 0}$$

En particular noten que:

- $G = p_i$ es el generador de traslaciones en $\hat{\mathbf{q}}_i$ (conservación del momento lineal).
- $G = L_i$ es el generador de las rotaciones alrededor de $\hat{\mathbf{q}}_i$ (conservación del momento angular).

Ejercicio 14:

(a) Muestre que una partícula sometida a un potencial con simetría cilíndrica alrededor del eje z tiene $L_z =$ constante.

El Lagrangiano en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r, z)$$

Los momentos conjugados asociados son

$$\boxed{p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}} \qquad \boxed{p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}} \qquad \boxed{p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}}$$

$$\Rightarrow \ \mathcal{H} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r, z) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + p_z^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r, z)$$

Es fácil ver que

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi} = p_\varphi$$

Para estudiar la conservación de L_z podemos calcular el corchete $[\mathcal{H}, L_z] = [\mathcal{H}, p_\varphi]$:

$$[\mathcal{H}, p_\varphi] = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\underbrace{\frac{\partial p_\varphi}{\partial p_i}}_{\delta_{\varphi i}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial p_\varphi}{\partial q_i}}_{=0}\right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0$$

Entonces, según el resultado que obtuvimos en (7) concluimos que

$$\boxed{[\mathcal{H}, p_\varphi] = \delta\mathcal{H} = 0} \ \Leftrightarrow \ \boxed{p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{constante}}$$

Algunas propiedades de los corchetes: (**Ejercicio 10**)

Sean f, g y h funciones arbitrarias con a y b constantes:

- $[f, g] = -[g, f]$ (antisimetría)
- $[af + bg, h] = a[f, h] + b[g, h]$ (linealidad)
- $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$
- $\frac{\partial}{\partial x}[f, g] = [\frac{\partial f}{\partial x}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial x}]$
- $[F(\mathbf{q}, \mathbf{p}), p_i] = \frac{\partial F}{\partial q_i}$
- $[F(\mathbf{q}, \mathbf{p}), q_i] = -\frac{\partial F}{\partial p_i}$
- $[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$ (identidad de Jacobi: permutación cíclica de f, g y h)