Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2012 – Segundo parcial (29/11/2012)

P1. (4 puntos) Un aro de radio R se hace rotar alrededor de un eje vertical con velocidad ω (el eje coincide con un diámetro del aro). En el interior del aro se halla una varilla delgada de masa despreciable cuyo punto medio se halla a una distancia d del centro y cuyos extremos se pueden mover en contacto con el aro y sin fricción (hay gravedad). Un disco delgado de masa m está centrado en el medio de la varilla de forma que puede girar con el plano del disco perpendicular a la misma. Considere I e I_3 los momentos de inercia del disco con respecto al CM, tome como eje 3 al eje de simetría.

a) Escriba el lagrangiano del sistema.
b) Exprese las magnitudes que se conservan. ¿Es el hamiltoniano igual a la energía?
c) Teniendo en cuenta el punto b), escriba el problema unidimensional equivalente para el ángulo θ de Euler.
d) Usando el resultado del punto c), calcule el valor θ_0 de equilibrio, analize la estabilidad de el(los) punto(s) de equilibrio, y calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio estable. Considere los casos límites: $\omega \to 0, \omega \to \infty$.
Ayuda $\alpha \cos(\theta) - \beta \sin(\theta) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\theta + \gamma)$, donde: $\cos(\gamma) = \alpha / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

P2. (3 puntos) Dado el siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{[p_x - \alpha t^2 (x-y)]^2}{2} + \frac{[p_y + \alpha t^2 (x-y)]^2}{2} - \alpha t (x-y)^2$$

a) Plantear las ecuaciones de Hamilton correspondientes (no las resuelva).
b) Usando los corchetes de Poisson pruebe que la siguiente transformación *dependiente del tiempo* es canónica:

$$q_1 = x, \quad p_1 = p_x - \alpha t^2 (x-y)\,, \quad q_2 = y, \quad p_2 = p_y + \alpha t^2 (x-y)$$

c) Encuentre la función generatriz F_2 de la transformación canónica propuesta.
d) Escriba el nuevo hamiltoniano y resuelva las nuevas ecuaciones de Hamilton. Emplee esto para encontrar la solución general del problema original.

P3. (3 puntos)
El hamiltoniano relativista que describe el movimiento bidimensional de una masa m sujeta a un campo gravitacional uniforme $\vec{F} = -mg\hat{y}$ se escribe: $H = \sqrt{c^2(p_x^2 + p_y^2) + (mc^2)^2} + mgy$.

a) Escriba la ecuación de Hamilton-Jacobi y resuelvala para encontrar la solución general de la trayectoria $y(x)$ y la función $y(t)$.
b) Exprese la solución $y(t)$ para las siguientes condiciones iniciales: $y(0) = p_y(0) = p_x(0) = 0$ (caida libre).
c) Muestre que en el caso anterior, la función $y(t) \to -gt^2/2$ en el límite no relativista $gt << c$.
Ayuda $\int du/\sqrt{u^2 - a^2} = ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$