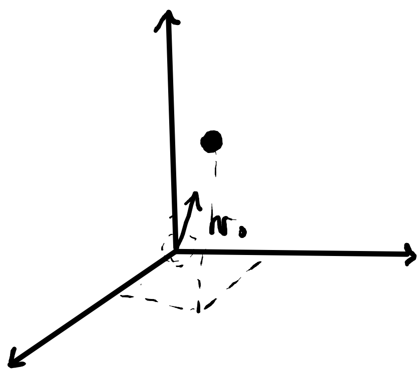
Ejercicio

Considere el problema de tiro oblicuo en 3D (gravedad vertical en la dirección z). Una partícula (pelota) se patea en t=0 con velocidades iniciales $\vec{v}_0 = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$



1. Hallar la evolución de la posición de la pelota $\vec{r}(t)$ y de su momento lineal $\vec{p}(t)$ usando el método de Hamilton-Jacobi.

La energía cinética será: $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

La energía potencial será: $V = m\vec{g} \cdot \vec{r} = mgz$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

$\Rightarrow$ Buscar los momentos conjugados $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$.

- $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} m \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$

- $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \dot{y} m \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m}$

- $p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \dot{z} m \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} - \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \right] + mgz$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2m} \underbrace{\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right]}_{\vec{p}^{\,2}} + mgz$$

Ahora la ecuación de Hamilton-Jacobi será:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \right] + mgz + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Para proponer una solución para S analizo primero el sistema:

- $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo $\rightarrow \mathcal{H} = h$

A su vez, T es homogénea de grado dos en las velocidades y V no depende de las velocidades

$\Rightarrow \quad \mathcal{H} = h = E$.

$\therefore$ Propongo $\quad S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t \quad$ con $\alpha_1 = h = E$.

. Las variables x e y son cíclicas

$\Rightarrow$ Propongo $\quad W(q, \alpha) = \tilde{W}(z, \alpha) + \alpha_2 x + \alpha_3 y$

$\therefore$ Propongo $\quad S(q, \alpha, t) = \tilde{W}(z, \alpha) + \alpha_2 x + \alpha_3 y - \alpha_1 t$

Reemplazando en la ec. de $\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$:

$$\frac{1}{2m}\left[\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial z}\right)^2\right] + mgz - \alpha_1 = 0$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial z}\right)^2 + mgz = \alpha_1 - \frac{1}{2m}\left[\alpha_2^2 + \alpha_3^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} = \pm \sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2m^2 g z}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{W}(z, \alpha) = \int_{z_0(\alpha)}^{z} \pm \sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2m^2 g z}\, dz$$

$$\tilde{W}(z,\alpha) = \mp \frac{1}{3m^2g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2m^2 g z\right)^{3/2} + K(\alpha)$$

Ahora busco los $\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$, suponiendo que integro desde un punto de retorno de forma tal que $K(\alpha) = 0$.

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \mp \frac{1}{mg}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2m^2 g z\right)^{1/2} - t$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \pm \frac{\alpha_2}{m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2m^2 g z\right)^{1/2} + x$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \pm \frac{\alpha_3}{mg}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2m^2 g z\right)^{1/2} + y$$

→ Despejo $z(\alpha, \beta, t)$:

$$\beta_1 + t = \mp \frac{4}{mg}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2m^2 g z\right)^{1/2}$$

$$\left[\left[(\beta_1 + t)\, mg\right]^2 - 2m\alpha_1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2\right]\left(-\frac{1}{2m^2 g}\right) = z(\beta, \alpha, t)$$

$$\boxed{z(\beta,\alpha,t) = -\frac{g}{2}(\beta_1 + t)^2 + \frac{\alpha_1}{mg} - \frac{(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)}{2m^2 g}}$$

Reemplazando en la ecuación de β_2:

$$\beta_2 = \pm \frac{\alpha_2}{m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2m^2 g z\right)^{1/2} + x$$

$$\beta_2 = \pm \frac{\alpha_2}{m^2 g}\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2m\alpha_1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + m^2 g^2 (\beta_1 + t)^2\right)^{1/2} + x$$

$$\beta_2 = \pm \frac{\alpha_2}{m^2 g}\, mg\, |\beta_1 + t| + x$$

$$\boxed{x(\beta, \alpha, t) = \beta_2 \mp \frac{\alpha_2}{m}|\beta_1 + t|}$$

Reemplazando z en β_3: la cuenta es análoga a la anterior

$$\Rightarrow \boxed{y(\beta, \alpha, t) = \beta_3 \mp \frac{\alpha_3}{m}|\beta_1 + t|}$$

Para saber que hacer con el $\pm$ y los módulos busco la relación entre $|p_z|$ y $|\beta_1 + t|$, ya que el $\pm$ depende del signo de p_z: $\begin{cases} + & \text{si } p_z > 0 \\ - & \text{si } p_z < 0 \end{cases} \Rightarrow \pm |p_z| = p_z$

Por las ecuaciones de Hamilton: $\dot{z} = \frac{p_z}{m}$

$\Rightarrow$ Derivando $z(\alpha, \beta, t)$:

$$\dot{z}(\alpha, \beta, t) = -g(\beta_1 + t)$$

$$\Rightarrow p_z = -mg(\beta_1 + t) \iff |p_z| = mg|\beta_1 + t|$$

$$\Rightarrow \frac{|p_z|}{mg} = |\beta_1 + t|$$

$\Rightarrow$ Reemplazando en x e y:

- $x(\beta, \alpha, t) = \beta_2 \mp \frac{\alpha_2}{m} \frac{|p_z|}{mg} = \beta_2 - \frac{\alpha_2}{m^2 g} p_z = \beta_2 + \frac{\alpha_2}{m}(\beta_1 + t)$

- $y(\beta, \alpha, t) = \beta_3 \mp \frac{\alpha_3}{m} \frac{|p_z|}{mg} = \beta_3 - \frac{\alpha_3}{m^2 g} p_z = \beta_3 + \frac{\alpha_3}{m}(\beta_1 + t)$

Aplicando condiciones iniciales:

Supongo $\vec{r}(t=0) = \vec{0}$ y $\dot{\vec{r}}(t=0) = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$

- $x(\alpha, \beta, 0) = 0 = \beta_2 + \frac{\alpha_2}{m}\beta_1 \qquad (1)$

- $y(\alpha, \beta, 0) = 0 = \beta_3 + \frac{\alpha_3}{m}\beta_1 \qquad (2)$

$$\bullet\ z(\alpha,\beta,0) = -\frac{g}{2}\beta_1^2 + \frac{\alpha_1}{mg} - \frac{(\alpha_2^2+\alpha_3^2)}{2m^2g} = 0 \qquad (3)$$

$$\bullet\ \dot{x}(\alpha,\beta,0) = \frac{\alpha_2}{m} = V_{ox} \qquad (4)$$

$$\bullet\ \dot{y}(\alpha,\beta,0) = \frac{\alpha_3}{m} = V_{oy} \qquad (5)$$

$$\bullet\ \dot{z}(\alpha,\beta,0) = -g\beta_1 = V_{oz} \qquad (6)$$

$\Rightarrow$ De (4), (5) y (6):

$$\boxed{\beta_1 = \frac{-V_{oz}}{g}} \qquad \boxed{\alpha_3 = V_{oy}\, m} \quad , \quad \boxed{\alpha_2 = V_{ox}\, m}$$

Reemplazando en (1):

$$0 = \beta_2 + \frac{\alpha_2}{m}\beta_1 = \beta_2 - \frac{V_{ox}V_{oz}}{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_2 = \frac{V_{ox}V_{oz}}{g}}$$

En (2): $0 = \beta_3 + \frac{\alpha_3}{m}\beta_1 = \beta_3 - \frac{V_{oy}V_{oz}}{g}$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_3 = \frac{V_{oy}V_{oz}}{g}}$$

Em (3):

$$-\frac{g}{2}\beta_1^2 + \frac{\alpha_1}{mg} - \frac{(\alpha_2^2+\alpha_3^2)}{2m^2g} = 0$$

$$-\frac{v_{0z}^2}{2g} + \frac{\alpha_1}{mg} - \frac{(v_{0x}^2 m^2 + v_{0y}^2 m^2)}{2m^2 g} = 0$$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{m}{2}\left[v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2\right]}$$

Verifica que $\alpha_1 = h = E$

$$\Rightarrow \boxed{x(\alpha,\beta,t) = v_{0x}\,t}$$

$$\boxed{y(\alpha,\beta,t) = v_{0y}\,t}$$

$$z(\alpha,\beta,t) = -\frac{g}{2}(\beta_1+t)^2 + \frac{\alpha_1}{mg} - \frac{(\alpha_2^2+\alpha_3^2)}{2m^2g}$$

$$= -\frac{g}{2}\left(\frac{v_{0z}^2}{g^2} - \frac{2v_{0z}}{g}t + t^2\right) + \frac{1}{2g}\left[v_{0x}^2+v_{0y}^2+v_{0z}^2\right]$$

$$- \frac{(v_{0x}^2+v_{0y}^2)}{2g}$$

$$\boxed{z(\alpha,\beta,t) = v_{0z}\,t - \frac{g}{2}t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = v_{0x} t\,\hat{x} + v_{0y}\,\hat{y} + \left(v_{0z} t - \frac{g}{2} t^2\right)\hat{z}}$$

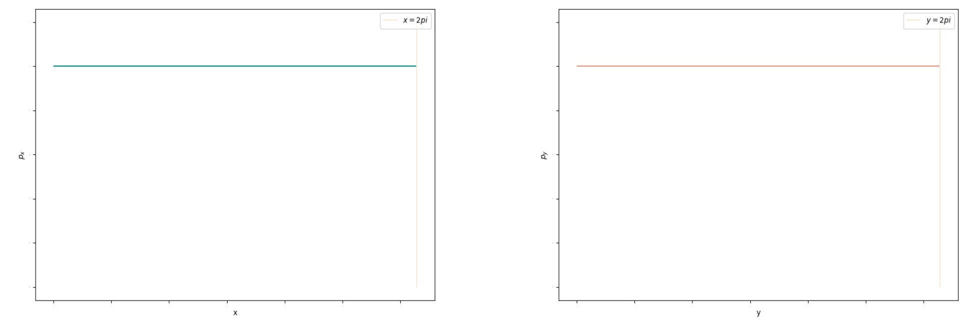
$$y \quad \vec{p}(t) = \dot{\vec{r}}\, m$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}(t) = m v_{0x}\,\hat{x} + m v_{0y}\,\hat{y} + m\left(v_{0z} - g t\right)\hat{z}}$$

Ángulo-Acción

En ángulo-acción los nuevos momentos P serán los J.

Como x e y son cíclicas, p_x y p_y son constantes. Como el movimiento no es periódico en (x, y), elijo como variables de acción $J_x = p_x = \alpha_2$ y $J_y = p_y = \alpha_3$ (no son las usuales variables de acción, tienen otras unidades). Podemos pensarlo como que cortamos el diagrama de fase de p_x y p_y en 2π para respetar la conservación del área (Figura 1). Entonces $J_x = \oint p_x dx/(2\pi) = p_x 2\pi/(2\pi)$.



(a) p_x. (b) p_y.

Figura 1: Momentos asociados a x e y.

Para el diagrama de fases en z, dado que $\mathcal{H} = E$ puede despejarse p_z en función de z:

$$p_z = \pm\sqrt{2mE - J_x^2 - J_y^2 - 2m^2 g z}$$

La parte positiva corresponde a la mitad superior de la curva que se ve en la Figura 2 y la parte negativa a la inferior.

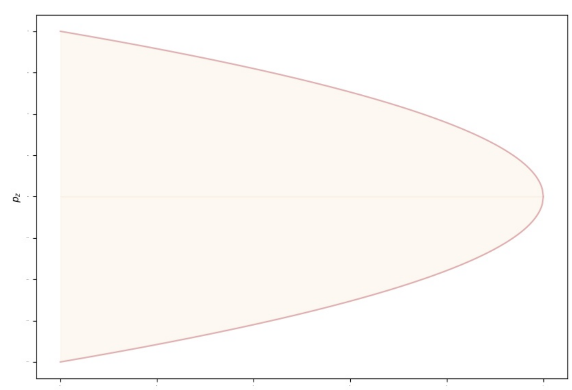


Figura 2: Diagrama de fases donde se impuso una barrera de potencial en z=0, ya que la pelota no puede seguir después de este punto.

El punto de retorno z_0 se da cuando $p_z = 0$:

$$z_0 = \frac{E}{mg} - \frac{J_x^2 + J_y^2}{2m^2 g} \tag{1}$$

Para sacar el área total voy a calcular el área superior que se ve en la Figura 2 y luego multiplicarla por 2. Esta queda:

$$J_z = \frac{1}{2\pi} \oint p_z dz = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{z_0} \sqrt{2mE - J_x^2 - J_y^2 - 2m^2 g z}\, dz \underset{\substack{b=2mE-J_x^2-J_y^2 \\ a=2m^2 g}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2}{3a} (-az + b)^{3/2} \right] \Bigg|_0^{z_0}$$

Como $z_0 = b/a$

$$J_z = \frac{1}{3\pi m^2 g} (2mE - J_x^2 - J_y^2)^{3/2} \tag{2}$$

Despejando E de (2):

$$\boxed{E = \frac{1}{2m} \left[J_x^2 + J_y^2 + (3\pi m^2 g J_z)^{2/3} \right]} \tag{3}$$

Dado que el nuevo hamiltoniano es $\mathcal{K} = E(J)$, las frecuencias del movimiento son:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i = \frac{\partial E}{\partial J_i}$$

En particular:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_x &= \frac{J_x}{m} & & & \theta_x &= \omega_x t + \gamma_x \\ \omega_y &= \frac{J_y}{m} & &\longrightarrow & \theta_y &= \omega_y t + \gamma_y \\ \omega_z &= \frac{1}{3m} \frac{(3\pi m^2 g)^{2/3}}{J_z^{1/3}} & & & \theta_z &= \omega_z t + \gamma_z \end{aligned}} \tag{4}$$

Viendo las unidades de estas frecuencias, si se reemplaza J_x y J_y por mv_{0x} y mv_{0y} respectivamente puede verse que tanto ω_x como ω_y quedan en unidades de velocidad. Esto tiene sentido porque en estas coordenadas las pelota aumenta su posición indefinidamente, lo cual puede considerarse un caso límite de rotación. Por el otro lado, ω_z queda en unidades de frecuencia. En esta coordenada el movimiento es de libración, ya que va de 0 a z_0 y de z_0 a 0 periódicamente.

Una vez resuelto el problema en las nuevas variables, para antitransformar debo hallar primero la función generatriz $F_2(q, J) = W_J(q, J)$, que puedo calcularla sabiendo que la derivada respecto de las variables de posición viejas debe darme los momentos $p(q, J)$ escritos en función de x, y, z, J_x, J_y, J_z.

Proponiendo $W_J(q, J) = W_x(x, J) + W_y(y, J) + W_z(z, J)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_x}{\partial x} &= p_x = J_z \to W_x = J_x x \\
\frac{\partial W_y}{\partial y} &= p_y = J_y \to W_y = J_y y \\
\frac{\partial W_z}{\partial z} &= p_z = \pm\sqrt{(3\pi m^2 g J_z)^{2/3} - 2m^2 g z}
\end{aligned}$$

A partir de esto puedo ver que W_J es:

$$W_J(q, J) = J_x x + J_y y \mp \frac{\left((3\pi m^2 g J_z)^{\frac{2}{3}} - 2m^2 g z\right)^{3/2}}{3m^2 g}$$

Si la comparamos con la generatriz de H-J:

$$S(q, \alpha, t) = \alpha_2 x + \alpha_3 y \mp \frac{\left(2m\alpha_1 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - 2m^2 g z\right)^{3/2}}{3m^2 g} - \alpha_1 t$$

vemos que lo que hicimos para pasar de H-J a A-A fue reescribir $\alpha(J)$. El último término $\alpha_1 t$ era el responsable en H-J de que $\mathcal{K} = 0$. En A-A no aparece porque el nuevo hamiltoniano no se anula, sino que es la energía $\mathcal{K} = E(J)$.

Ahora sí, antitransformo usando que las variables nuevas de ángulo son las derivadas de la generatriz respecto de las variables de acción:

$$\begin{aligned}
\theta_x &= \frac{\partial W_J}{\partial J_x} = x \\
\theta_y &= \frac{\partial W_J}{\partial J_y} = y \\
\theta_z &= \frac{\partial W_J}{\partial J_z} = \mp\frac{\pi^{\frac{2}{3}}\sqrt{(3\pi m^2 g J_z)^{2/3} - 2m^2 g z}}{(3m^2 g J_z)^{1/3}}
\end{aligned}$$

Igualando con las expresiones $\theta(t)$ que se hallaron en (4) resolviendo el nuevo hamiltoniano, puede volverse a las variables originales y verificar que queda la misma forma funcional que antes:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{J_x}{m} t + \gamma_x = \frac{\alpha_2}{m} t + \gamma_x = v_{0x} t + \gamma_x \\
y(t) &= \frac{J_y}{m} t + \gamma_y = \frac{\alpha_3}{m} t + \gamma_y = v_{0y} t + \gamma_y \\
z(t) &= -\frac{g}{2}\left[t + \left(\frac{3J_z}{\pi^2 m g^2}\right)^{1/3} \gamma_z\right]^2 + \frac{(3\pi m^2 g J_z)^{2/3}}{2m^2 g}
\end{aligned}$$

Si comparamos con las constantes de H-J, $\gamma_x = \beta_x$, $\gamma_y = \beta_y$ y $(3J_z/\pi^2 m g^2)^{1/3}\gamma_z = \beta_1$.