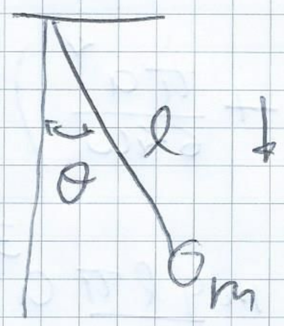
Variacionales

P2)



$$\mathcal{L} = \frac{m l^2 \dot{\theta}^2}{2} + mgl\cos\theta$$

$\theta(0) = 0 \qquad \theta\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0$

$$\theta(t) = a\sin\omega t + bt + c$$

$$\theta(0) = \boxed{c = 0}$$

$$\theta\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = b\frac{\pi}{\omega} = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$\therefore \quad \theta(t) = a\sin\omega t$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega a\cos\omega t$$

$$S = \int_0^{\pi/\omega} \mathcal{L}\, dt$$

$$S = \omega^2 \frac{m l^2}{2} a^2 \underbrace{\int_0^{\pi/\omega} \cos^2\omega t\, dt}_{\frac{\pi}{2\omega}} + mgl\int_0^{\pi/\omega} \cos(a\sin\omega t)\, dt$$

Usamos: $\cos(a\sin\omega t) \sim 1 - \frac{a^2\sin^2\omega t}{2} + \frac{a^4\sin^4\omega t}{24}$

- $\int_0^{\pi/\omega} \sin^2\omega t\, dt = \frac{\pi}{2\omega}$.
- $\int_0^{\pi/\omega} \sin^4\omega t\, dt = \frac{3\pi}{8\omega}$

$$\int_0^{\pi/\omega} \cos(a\sin\omega t)\,dt \simeq mgl\left(1-\frac{\pi a^2}{4\omega}+\frac{\pi a^4}{64\omega}\right)$$

$$S \simeq \frac{m l^2 a^2 \omega \pi}{4} + mgl\left(1-\frac{\pi a^2}{4\omega}+\frac{\pi a^4}{64\omega}\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \pi\frac{m l^2 a\omega}{2} - \frac{mgl\pi a}{2\omega} + \frac{mgl\pi a^3}{16\omega} = 0$$

factor común $\frac{m l a \pi}{2\omega}$:

$$\pi\frac{m l a}{2\omega}\left(\omega^2 l - g + \frac{g a^2}{8}\right) = 0$$

$a = 0$ (solución trivial)

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\left(1-\frac{a^2}{8}\right)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1-\frac{a^2}{8}}} \Rightarrow \boxed{\tau_v = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{8}}}}$$

Caso exacto:
(energía)

$$\frac{m l^2 \dot{\theta}(0)^2}{2} = mgl(1-\cos a)$$

$$\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{1-\cos a}$$

Variacional:

$$\dot{\theta}_v(0) = \omega a = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{8}}$$

en $a = 1$ (radianes)

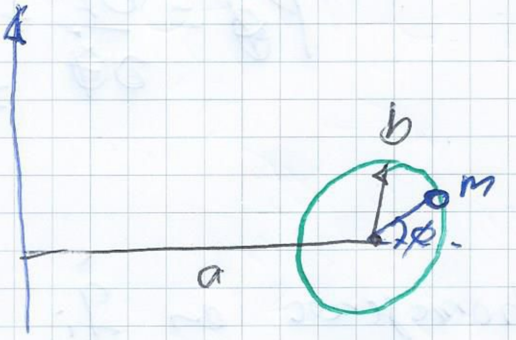
$$\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot 0{,}9588$$

$$\dot{\theta}_v(0) = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot 0{,}9354$$

$\sim 3\%$.

Lagrange

P1)



Coordenadas θ y ϕ.

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta \qquad \rho = a + b\cos\phi$$
$$z = b\sin\phi$$

$$\begin{cases} x = (a+b\cos\phi)\cos\theta \\ y = (a+b\cos\phi)\sin\theta \\ z = b\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dot{\theta}(a+b\cos\phi)\sin\theta - b\dot{\phi}\sin\phi\cos\theta \\ \dot{y} = \dot{\theta}(a+b\cos\phi)\cos\theta - b\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta \\ \dot{z} = b\dot{\phi}\cos\phi \end{cases}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = \dot{\theta}^2(a+b\cos\phi)^2 + b^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + b^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi$$

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{\theta}^2(a+b\cos\phi)^2 + b^2\dot{\phi}^2\right]$$

$$V = mgb\sin\phi.$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[\dot{\theta}^2(a+b\cos\phi)^2 + b^2\dot{\phi}^2\right] - mgb\sin\phi$$

Magnitudes conservadas:

i) θ cíclico $\quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m(a+b\cos\phi)^2\dot\theta$
$= l \quad$ (1)

ii) t cíclico.
T: cuadrática homogenea en $\dot q_i$
V: no depende de $\dot q_i$

$\Rightarrow H = T + V = E \quad$ constante

$$\frac{m}{2}\left[(a+b\cos\phi)^2\dot\theta^2 + b^2\dot\phi^2\right] + mgb\sin\phi = E \quad (2)$$

de (1) en (2):

$$\frac{m}{2}(a+b\cos\phi)^2\dot\theta^2 + l^2 b^2$$

$$\frac{mb^2\dot\phi^2}{2} + \frac{l^2}{2m(a+b\cos\phi)^2} + mgb\sin\phi = E$$

Problema unidimensional equivalente.

b) Si $\dot\phi(0)=0$ $\phi(0)=0$. $\dot\theta^2(0) = \alpha^2\frac{g}{a+b}$
hallar la ecuación que determina
ϕ_{min} y/o ϕ_{max}.

Lagrange

$t=0$ $\quad l = m(a+b)^2 \cancel{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha g}{a+b}} = \alpha m g^{1/2} (a+b)^{3/2}$.

$\dot\theta(0) = \frac{\alpha g}{(a+b)}$

$t=0$ $\quad \frac{\alpha^2}{2} m g (a+b) = E$

$\begin{cases} \dot\phi(0) = 0 \\ \phi(0) = 0 \end{cases}$.

Puntos de retorno:

$$\frac{\alpha m^2 g (a+b)^3}{2(a+b\cos\phi)^2} + mgb\sin\phi = \frac{\alpha^2}{2} m g (a+b).$$

c) Órbitas circulares.

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial \phi} = 0$$

$$-\frac{l^2(-\cancel{b}\sin\phi)}{m(a+b\cos\phi)^3} + mg\cancel{b}\cos\phi = 0$$

$$l^2 = -\cot\phi\, m^2 g\,(a+b\cos\phi)^3$$

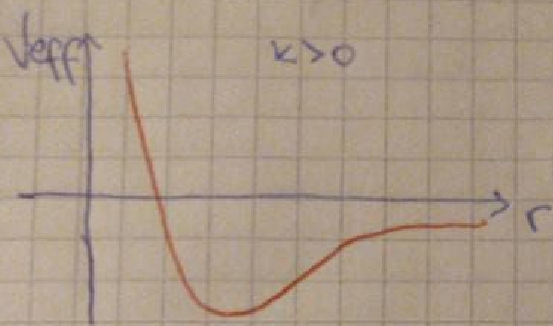
$\begin{cases} \dot\theta = \Omega \\ \dot\phi = 0 \end{cases}$

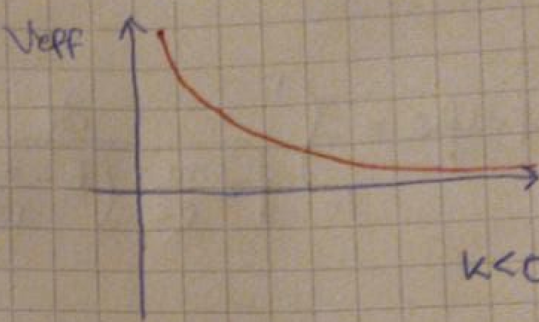
$$m^2\Omega^2 (a+b\cos\phi)^2 = -\cot\phi\, m^2 g\,(a+b\cos\phi)^3$$

$$\Omega^2 = -g\cot\phi\,(a+b\cos\phi)^3$$

2) $V(r) = -\frac{k}{r^{2/3}} \Rightarrow V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^{2/3}}$

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}\right|_{r_c} = -\frac{l^2}{m r_c^3} + \frac{2k}{3 r_c^{5/3}} = 0 \Rightarrow r_c^{9/3-5/3} = r_c^{4/3} = \frac{3l^2}{2mk} \Leftrightarrow k>0$$





$$E_c = V_{eff}(r_c) = \frac{l^2}{2m}\left(\frac{2mk}{3l^2}\right)^{3/2} - k\sqrt{\frac{2mk}{3l^2}} = \sqrt{\frac{2mk}{3l^2}}\left(\frac{k}{3} - k\right) = -\sqrt{\frac{2mk}{3l^2}}\,\frac{2k}{3}$$

$$\dot{\varphi}_c = \omega = \frac{l}{m r_c^2} = \frac{l}{m}\left(\frac{2mk}{3l^2}\right)^{3/2} = \frac{2\pi}{\tau}$$

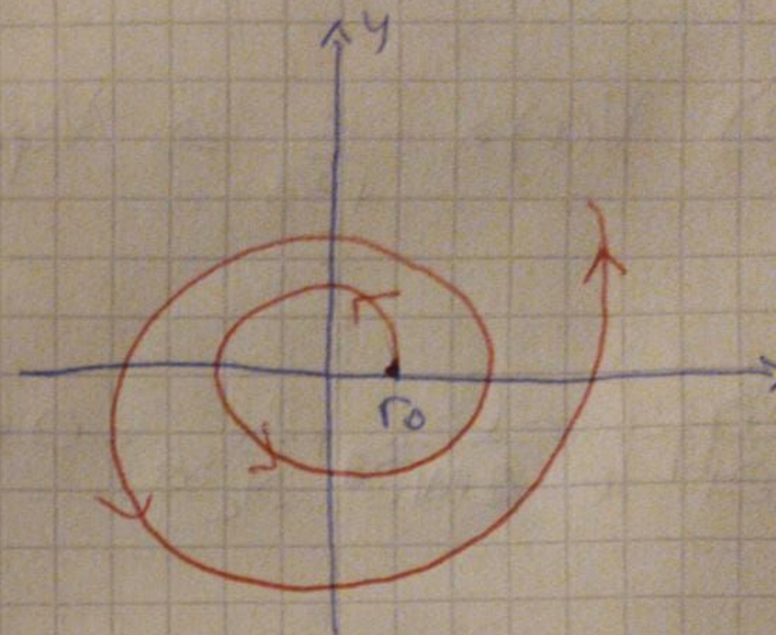
Del gráfico se ve que es un punto estable.

$$\left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r_c} = \frac{3l^2}{m r_c^4} - \frac{10k}{9 r_c^{8/3}} = \frac{10}{9}\frac{k}{r_c^{8/3}}\left[\frac{27 l^2}{10mk}\frac{1}{r_c^{4/3}} - 1\right]$$

$$= \frac{10}{9}\frac{k}{r_c^{8/3}}\left[\frac{9}{5} r_c^{4/3}\frac{1}{r_c^{4/3}} - 1\right] = \frac{10k}{9 r_c^{8/3}}\cdot\frac{4}{5} > 0$$

c) $r = r_0 + C\varphi^2, \ \varphi \geq 0.$

- $r(0) = r_0$
- $r(\infty) = \infty$
- $r(\pi) = r\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3\pi^2 C}{4}$



$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2mr^4}{\ell^2}\left(E - \frac{k}{r^{2/3}}\right) - r^2}}$$

La trayectoria coincide con lo esperado del Veff. r_0 es un pto de retorno.

Ejercicio 4

November 4, 2020

1 Consigna

El sistema de la figura está formado por tres masas, dos de masa m unidas por un resorte de constante k y longitud natural l_0 enhebradas en una varilla horizontal lo mismo que el resorte. Ambas masas están unidas a una tercer masa M que cuelga de estas mediante resortes de constante k y longitud natural nula. El sistema se halla bajo gravedad.

a) Elija un conjunto de coordenadas generalizadas y escriba el Lagrangiano.

b) Determine las posiciones de equilibrio estable y escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones en un entorno de la configuración de equilibrio encontradas. Escriba las matrices de masa y de potencial. Se sugiere usar $\eta_4 = y_2 y_{20}$ (y_2 coordenada vertical de la masa M).

c) Encuentre las frecuencias y los modos normales de oscilación y grafique cualitativamente el movimiento del sistema correspondiente a cada modo.

2 Resolución

a) Las masas m ambas pueden moverse solamente en el eje horizontal, y la masa M en el plano (las condiciones de vínculo son 5 $y_1 = y_3 = 0$, $z_1 = z_2 = z_3 = 0$). El subíndice 2 es para referirse a la masa M. Por lo tanto voy a necesitar 4 coordenadas generalizadas para describir al problema. Utilizo coordenadas cartesianas: x_1, x_2, x_3, y_2. La energía cinética queda:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \tag{1}$$

El potencial consta de tres potenciales elásticos y del potencial gravitatorio de la masa M:

$$V = \frac{1}{2}k[(x_2 - x_1)^2 + {y_2}^2] + \frac{1}{2}k[(x_3 - x_2)^2 + {y_2}^2] + \frac{1}{2}k(x_3 - x_1 - l_o)^2 - Mgy_2 \tag{2}$$

Finalmente el Lagrangiano queda:

$$L = T - V \tag{3}$$

b) Para hallar las posiciones de equilibrio hago las derivadas parciales del potencial V respecto a cada coordenada generalizada y veo en que condiciones se anulan.

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -k(x_2 - x_1) - k(x_3 - x_1 - l_o) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(x_2 - x_1) - k(x_3 - x_2) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = k(x_3 - x_2) + k(x_3 - x_1 - l_o) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_2} = 2ky_2 - Mg = 0 \tag{7}$$

De la ecuación (7) la posición de equilibrio: $y_{2o} = \frac{Mg}{2k}$. De la ecuación (5) tenemos que el desplazamiento respecto a la posición x_{2o} de la masa central M es igual en magnitud. Es decir: $-(x_{1o} - x_{2o}) = x_{3o} - x_{2o} = D$. Algo esperado dada la simetría de reflexión del problema en el plano vertical entre las masas m. Por lo tanto la distancia entre las masas m es $x_{3o} - x_{1o} = 2D$. Con la ecuación (4) y (6) tenemos la misma información: $kD + 2kD - kl_o = 0$, entonces queda determinado $D = \frac{l_o}{3}$. Finalmente las posiciones de equilibrio en x quedan en función de la posición de equilibrio de alguna de las masas, pongamos de la masa M en $x_{2o} = x_o$:

$$\text{Posiciones de equilibrio} \begin{cases} x_{1o} = x_o - \frac{l_o}{3} \\ x_{2o} = x_o \\ x_{1o} = x_o + \frac{l_o}{3} \\ y_{2o} = \frac{Mg}{2k} \end{cases}$$

Estas posiciones de equilibrio son estables, las derivadas segundas respecto a cada coordenada generalizada son positivas (puede verse luego con la matriz **V**).

Con estas posiciones de equilibrio, defino los desplazamientos: $\eta_i = x_i - x_{io}$ y desarrollo el Lagrangiano en estas nuevas variables.

La energía cinética queda:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M(\dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_4^2) + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2 \tag{8}$$

Y el potencial:

$$V = V_o + \frac{1}{2}k[(\eta_2 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2 + 2{\eta_4}^2] \tag{9}$$

Como el potencial original (ec 2) ya es cuadrático hay dos formas de obtenerlo en función de los desplazamientos η_i: (1) reemplazar los $_i$ por $\eta_i +_{io}$ directamente en la ec 2 y desarrollar los términos ó (2) desarrollar Taylor de V en función de $_i$ entorno a la posiciones de equilibrio $_{io}$. Recordamos que el potencial puede quedar definido a menos la constante V_o ya que no modifica la dinámica del problema.

Defino al vector:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Defino las matrices:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{V} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Chequeamos que las matrices obtenidas son simétricas.

El Lagrangiano en aproximación de pequeñas oscilaciones:

$$L = \frac{1}{2}\eta^t \mathbf{T} \eta - \frac{1}{2} k \eta^t \mathbf{V} \eta \tag{13}$$

c)

Para resolver Euler-Lagrange proponemos que η es un oscilador armónico $\eta = \mathbf{A} cos(\omega t)$, con A matriz con autovectores a en su columnas y ω del problema:

$$\mathbf{V} a = \omega^2 \mathbf{T} a \tag{14}$$

La solución general de η será una combinación de los modos normales.

Resolver (14) es ver para que ω se anula el determinante de $(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T})$.

Antes de ponerse a realizar esa cuenta, conviene analizar como podemos desacoplar los modos usando las simetrías del problema. De esta forma buscamos primero los autovectores. Existe una simetría de reflexión en el plano vertical entre las masas m con el plano vertical en la posicion de equilibrio de la masa M. Esta reflexión deja invariante al Lagrangiano, y por lo tanto existen modo simétrico y antisimétrico de esa reflexión S.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Los modos simétricos son los que al aplicar la matriz S nos devuelve el autovector con igual signo. Los modos antisimétricos los cambian de signo.

Modo simétrico:

El caso trivial de la masa M moviéndose sólo en la dirección vertical cumple con esta simetría:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

y esta frecuencia es $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$.

Si tenemos dudas podemos plantear el determinante, sin necesidad de factorizar esta frecuencia se ve sencillo porque el problema ya esta desacoplado en x e y.

El siguiente modo simétrico, que es ortogonal a a_1, es el de las masas m moviéndose en contrafase y dejando quieta la masa M:

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Aplicando (14) queda el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3k \\ 0 \\ -3k \\ 0 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

La frecuencia de este modo es $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$.

<u>Modo antisimétrico</u>:

Planteamos el autovector con las masas m moviendose en fase:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Nos queda:

$$\begin{pmatrix} k(1-\alpha) \\ 2k(-1+\alpha) \\ k(1-\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} m \\ \alpha M \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Que dá la ecuación cuadrática:

$$M\alpha^2 + \alpha(2m - M) - 2m = 0 \tag{21}$$

Una raíz es $\alpha = 1$, que dá $\omega_3 = 0$, que es el modo de traslación donde todas las masas se mueven rígidamente, este autovector es:

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

La otra raíz es $\alpha = \frac{-2m}{M}$, nos dá $\omega_4 = \sqrt{\frac{k}{m}(\frac{2m}{M}+1)}$, es el modo antisimétrico donde todas las masas m se mueven a igual fase y la masa M a contra fase con distinta magnitud, el autovector es:

$$a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2m}{M} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Otra forma de resolver el problema es buscando primero las frecuencias con el determinante y con esas frecuencias conseguir los autovectores. El determinante debe quedar factorizado en:

$$det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = \omega^2(2k - M\omega^2)(3k - m\omega^2)(k(2m+M) - \omega^2 mM) = 0 \tag{24}$$

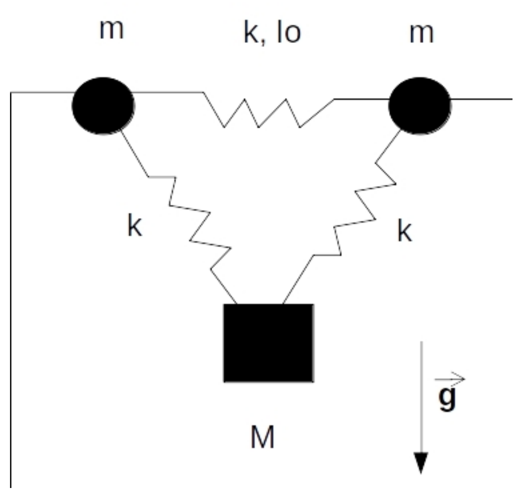


Figure 1: Esquema del ejercicio 4