Mecánica Clásica − 2do. cuatrimestre de 2020 − Recuperatorio del Primer parcial (10/12/2020)

(Justifique todas sus respuestas. Ponga su nombre en la primer hoja y enumere todas las carillas. Entregue un único PDF con los distintos problemas en hojas separadas, con nombre de archivo *Apellido_Nombre_LUxxxx*. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto.)

P1. (2,5 puntos) Una partícula de masa m se mueve sin rozamiento sobre la superficie de una casquete esférico de radio R. Otra partícula de masa M, se encuentra en el interior del casquete y está conectada a la primera partícula mediante un hilo de longitud L que se mantiene estirado. El hilo atraviesa un pequeño agujero en el centro superior del casquete, como se representa en la figura. La masa M se mueve en un plano y limitada por el hilo. Hay gravedad.

a) Especifique el número de grados de libertad del problema. Justifique. Escriba el Lagrangiano correspondiente usando coordenadas generalizadas apropiadas. *Ayuda:* Use coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera, y coordenadas con origen en el agujero del casquete esférico.
b) Encuentre las transformaciones infinitesimales que dejan invariante el Lagrangiano o la acción. Usando el Teorema de Nöether halle las magnitudes conservadas. ¿Es $h = E$?
c) Plantee las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas no cíclicas.
d) Exprese la condición para que la masa m realice un movimiento circular, y la masa M se encuentre fija.

P2. (2,5 puntos) Una partícula de masa en reposo m y carga eléctrica $q > 0$ se haya en el campo eléctrico: $\mathbf{E}(t) = E0\cos(\omega t)\hat{x}$. Se sabe que la partícula sale de $x = 0$ al tiempo $t = 0$ y vuelve a $x = 0$ al tiempo $t = \frac{2\pi}{\omega}$. A partir de una función de prueba dada por

$$x(t) = Acos(wt) + Bt + C$$

a) Encuentre la mejor aproximación a la trayectoria de acuerdo con el principio de mínima acción de Hamilton.
b) Obtenga la solución exacta del problema.
c) Compare la solución obtenida usando el principio de Hamilton con ell resultado exacto. ¿Qué conclusiones saca?

P3. (2,5 puntos) Una partícula de masa m se mueve en el potencial central

$$V(r) = -\frac{k}{3r^3}, \quad k > 0$$

a) Escriba el Lagrangiano y estudie el problema unidimensional equivalente justificando los pasos necesarios. ¿Existen órbitas circulares? En caso afirmativo determine su radio, energía y período como función del momento angular. Analice su estabilidad.
b) Grafique el potencial efectivo a partir de un análisis funcional (límites, puntos críticos, estabilidad). Discuta cualitativamente las trayectorias posibles.
c) Suponga que la partícula viene desde el infinito con velocidad inicial v_0 y parámetro de impacto b ($\ell = mv_0b$) . ¿Para qué valores de b la partícula cae al centro de fuerzas?
d) Suponga que bajo ciertas condiciones $r(\varphi) = r_0\,cos(\varphi)$. Dibuje cualitativamente la trayectoria (plano $x - y$), determinando el posible rango de valores de φ. Suponiendo que $r_0 = 2r_c/3$, con r_c el radio de la órbita circular, encuentre la energía de esta trayectoria. ¿Coincide la trayectoria con lo analizado en b)?

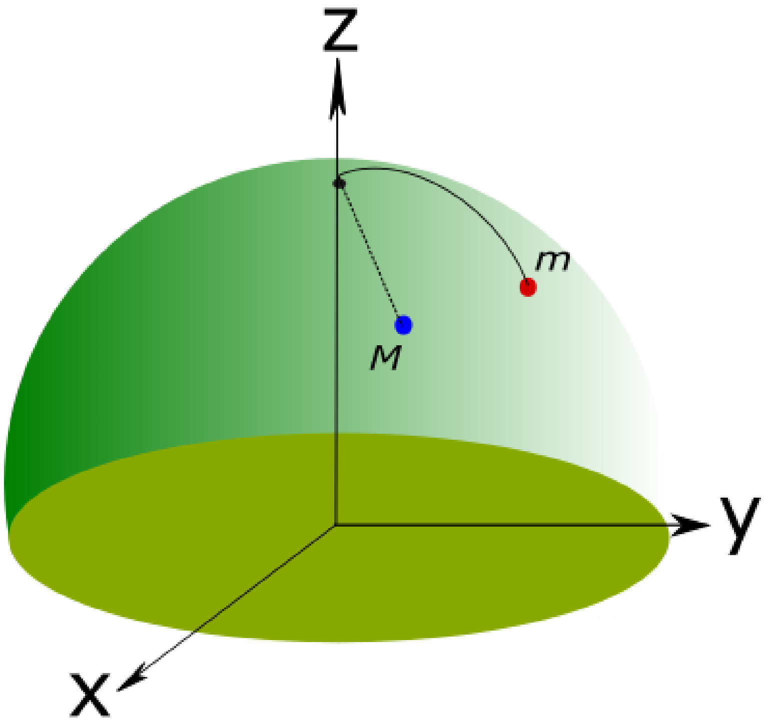
P4. (2,5 puntos) En el interior de un vagon de ferrocarril de masa M se suspenden dos péndulos pesados de masa m suspendidos de cuerdas de longitud l. El vagón puede rodar libremente sobre vias horizontales (ignore el momento de inercia de las ruedas). Hay gravedad.

a) Elija un conjunto de coordenadas generalizadas y escriba el Lagrangiano del sistema.

b) Determine las posiciones de equilibrio y escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones en un entorno de la configuración de equilibrio estable. Escriba las matrices de masa y de potencial. Se sugiere usar $l\theta_i = \eta_i$, $i = 1, 2$.

c) Para el caso $M = 3m$ y $\frac{mg}{l} = 2k$, encuentre las frecuencias y los modos normales de oscilación y grafique cualitativamente el movimiento del sistema correspondiente a cada modo.

Problema 1



Problema 4