Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2020 – Segundo parcial (3/12/2020)

(Justifique todas sus respuestas. Entregue los distintos problemas en hojas separadas. Ponga su nombre en todas las hojas. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto. Todos los problemas valen igual.)

P1. Un poste vertical de longitud r está fijado a un techo horizontal. Mediante una articulación que permite el libre movimiento, en el extremo inferior A del poste, hay conectada una varilla AP de longitud R y masa despreciable. Un disco homogeneo de radio r y masa m puede girar alrededor de la varilla con su punto medio en P, manteniéndose perpendicular a AP. El disco (masa m y radio r) rueda en el techo sin deslizar. El punto de contacto describe un círculo de radio R. La aceleración de la **gravedad** es g y la velocidad angular inicial del disco alrededor de la varilla AP es ω.

a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?, justifique. Exprese la velocidad angular del disco mas varilla.
b) Escriba el Lagrangiano y resuelva el movimiento del sistema. Calcule el período de rotación del centro de masa del disco en función de ω.
c) Obtenga el torque en la dirección tangente a la trayectoria del centro de masas, con respecto al punto fijo A. Asuma una reacción normal $\mathbf{N}$ en el punto de contacto entre el disco y el techo.
d) Calcule el mínimo valor de ω para que el contacto se mantenga.

Ayuda: Use la componente apropiada de las ecuaciones de Euler, usando el resultado del punto c). $I_3 = \frac{mr^2}{2} = 2I$.

P2. El Lagrangiano de una partícula de masa m viene dado por

$$\mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} + \frac{mq^2}{2\tau^2}$$

en donde τ es una constante conocida. Para resolver el sistema se efectúa la siguiente transformación $(p, q) \to (P, Q)$:

$$P = p^2 - \frac{m^2}{\tau^2} q^2$$
$$Q = \lambda \ \text{arctanh} \left(\frac{mq}{\tau p} \right)$$

a) Calcule cuánto debe valer λ para que la transformación sea canónica, utilizando un método distinto a encontrar una función generatriz.
b) Encontrar una función generatriz de tipo F_3 para la transformación canónica del inciso anterior. Usando: $F_2 = qp + QP + F_3$, calcule la función generatriz F_2. Compruebe explícitamente que el F_2 obtenido dá el valor correcto para p.
c) Halle el Hamiltoniano en variables originales. Encontrar la solución del problema en las nuevas variables usando las ecuaciones canónicas. Obtener la solución del problema en en las variables originales con las condiciones iniciales, $q(0) = 0$ y $\dot{q}(0) = p_0/m$.

Ayuda: $1 - \tanh^2 x = \cosh^{-2} x$, $\quad \frac{d \ \text{arctanh} \ x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$, $\quad \frac{d \ \tanh x}{dx} = \cosh^{-2} x$, $\quad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}$, $\quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$

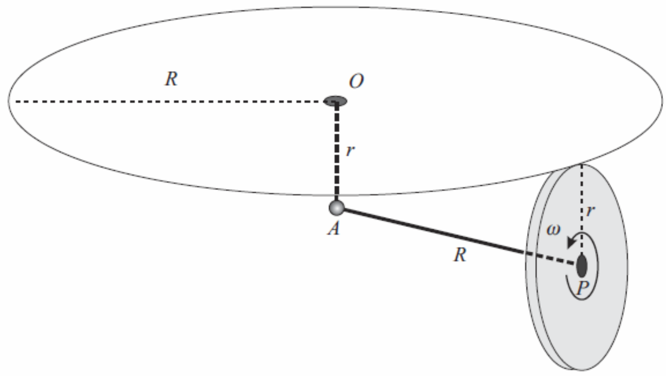
P3. El hamiltoniano relativista que describe el movimiento bidimensional de una partícula de masa m y carga q sujeta a un campo magnético se escribe:

$$\mathcal{H} = \sqrt{\left(c\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + m^2c^4}$$

donde $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Suponga un campo magnético constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$ descrito en uno de los gauges de Landau $\vec{A} = -B_0 y \hat{x}$.

a) Usando el método de Hamilton-Jacobi halle $x(t)$ e $y(t)$, y encuentre la ecuación de la trayectoria en el plano $x - y$.
b) Usando el método de Ángulo-Acción, proponga una generatriz $F_2(q, J)$ y halle las "frecuencias". Compárelas con lo obtenido en el inciso anterior.
c) Obtenga el radio y la frecuencia de la trayectoria en el plano $x - y$ en el límite no-relativista: $(\vec{p} - q\vec{A}/c)^2 \ll m^2c^2$.

Ayuda: $\int du/\sqrt{1-u^2} = -\arccos(u)$.


R
O
r
r
A
ω
R
P