Mecánica Clásica - Parcial 2012: Ejercicio 2

Federico Petrovich

27 de Septiembre de 2021

Problema 2

El lagrangiano del sistema viene dado por

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \alpha \sin(\omega t)\, x$$

y por ende el campo es

$$E(t) = \frac{\alpha}{q}\sin(\omega t). \tag{1}$$

Al comienzo del ejercicio, se pide minimizar la acción proponiendo una solución aproximada de la forma

$$x(t) = at^2 + bt + c. \tag{2}$$

Se busca entonces hallar los parametros a, b y c que satisfacen $x(0) = x(\tau) = 0$ y que minimizan la acción, con $\tau = \frac{\pi}{\omega}$.

a) Por un lado, la acción entre 0 y $\tau = \frac{\pi}{\omega}$ está dada por

$$S[x] = \int_0^\tau \mathcal{L} dt = \int_0^\tau \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + \alpha \sin(\omega t)\, x(t)\right) dt. \tag{3}$$

Por el otro, $x(0) = 0$ implica $c = 0$ y reemplazando, $x(\tau) = 0$ implica $b = -a\tau$. Por lo tanto,

$$x(t) = a\left(t^2 - \tau t\right), \tag{4}$$

$$\dot{x}(t) = a(2t - \tau). \tag{5}$$

Reemplazando en la acción queda

$$S(a) = \int_0^\tau \left[\frac{m}{2}a^2(2t-\tau)^2 + \alpha a \sin(\omega t)\left(t^2 - \tau t\right)\right] dt = \tau^3 \int_0^1 \left[\frac{m}{2}a^2(2u-1)^2 + \alpha a \sin(\pi u)\left(u^2 - u\right)\right] du, \tag{6}$$

donde $u = \frac{t}{\tau}$. Resolviendo las integrales se obtiene

$$S(a) = \tau^3\left(\frac{m}{6}a^2 - \frac{4}{\pi^3}\alpha a\right). \tag{7}$$

Por lo tanto, pidiendo

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \tag{8}$$

queda

$$a = \frac{12\alpha}{m\pi^3}. \tag{9}$$

b) Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$m\ddot{x} = \alpha \sin(\omega t). \tag{10}$$

La solución general será la del homogeneo más una particular, obteniendose

$$x(t) = A + Bt - \frac{\alpha\tau^2}{m\pi^2}\sin(\omega t). \tag{11}$$

Teniendo en cuenta que $x(0) = x(\tau) = 0$ se tiene que $A = B = 0$ y por lo tanto queda

$$x(t) = -\frac{\alpha\tau^2}{m\pi^2}\sin(\omega t), \tag{12}$$

$$\dot{x}\left(t\right) = -\frac{\alpha\tau}{m\pi}\cos\left(\omega t\right). \tag{13}$$

c) La velocidad inicial para la solución aproximada está dada por

$$v_0' = -a\tau = -\frac{12\alpha}{m\pi^3}\tau, \tag{14}$$

mientras que para la exacta es

$$v_0 = -\frac{\alpha\tau}{m\pi}. \tag{15}$$

Por ende, el cociente resulta

$$\frac{v_0'}{v_0} = \frac{12}{\pi^2} \simeq 1,22. \tag{16}$$

En cuanto a la distancia máxima, para la solución aproximada está dada por

$$d' = -\frac{3\alpha\tau^2}{m\pi^3}, \tag{17}$$

mientras que para la exacta es

$$d = -\frac{\alpha\tau^2}{m\pi^2}. \tag{18}$$

Luego, el cociente resulta

$$\frac{d'}{d} = \frac{3}{\pi} \simeq 0,95. \tag{19}$$

Para concluir, notar que $1 - \frac{v_0}{v_0'} \simeq 0,18$ mientras que $1 - \frac{d'}{d} = 0,05$. Luego, las velocidades iniciales difieren en un 18% mientras que las distancias máximas en un 5%.