Mecánica Clásica

Fuerzas centrales
Ejercicio de Parcial
Leandro E. Fernández

Enunciado:

Una partícula de masa m y momento angular L se mueve sujeta a una fuerza central $F(r)=-(k/r^2)\exp(-r/a)$, con k y a positivas.

a) Encuentre la ecuación que debe satisfacer el(los) radio(s) r_0 en una órbita circular.
b) Muestre que la órbita circular es estable sólo si $r_0 < a$ (considere que la ecuación obtenida en a posee solución).
c) Considere una órbita cercana a la órbita circular, en el caso que $r_0 << a$. Definido en perihelio como el punto de mínimo acercamiento $r=r_0 - \delta r$. Muestre que sobre un ciclo radial de la órbita, el ángulo polar del perihelio avanza en $\pi r_0/a$. Desprecie variaciones en la derivada temporal de Θ de su valor constante en órbita circular.

Hoja de Ruta

- Obtenemos un potencial
- Sacamos el potencial efectivo
- Lo graficamos a mano alzada buscando puntos de retorno, fijos, etc.

$$V = \int \frac{k}{r^2} e^{-\frac{r}{a}} dr$$

Andá a calcular la primitiva...

Intentemos de nuevo

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{ef}(r)$$

Órbita circular:

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = 0 \longrightarrow -\frac{l^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr} = -\frac{k}{r^2}e^{-\frac{r}{a}}$$

$$\boxed{\frac{l^2}{mr_0} - ke^{-\frac{r_0}{a}} = 0}$$

Analizar estabilidad

$$\frac{d^2V_{ef}}{dr^2}$$ → Usamos la segunda derivada

$$\frac{d^2V_{ef}}{dr^2} = \frac{3l^2}{mr^4} + \frac{d}{dr}\left(\frac{k}{r^2}e^{-\frac{r}{a}}\right)$$

Usamos la ecuación del ítem anterior

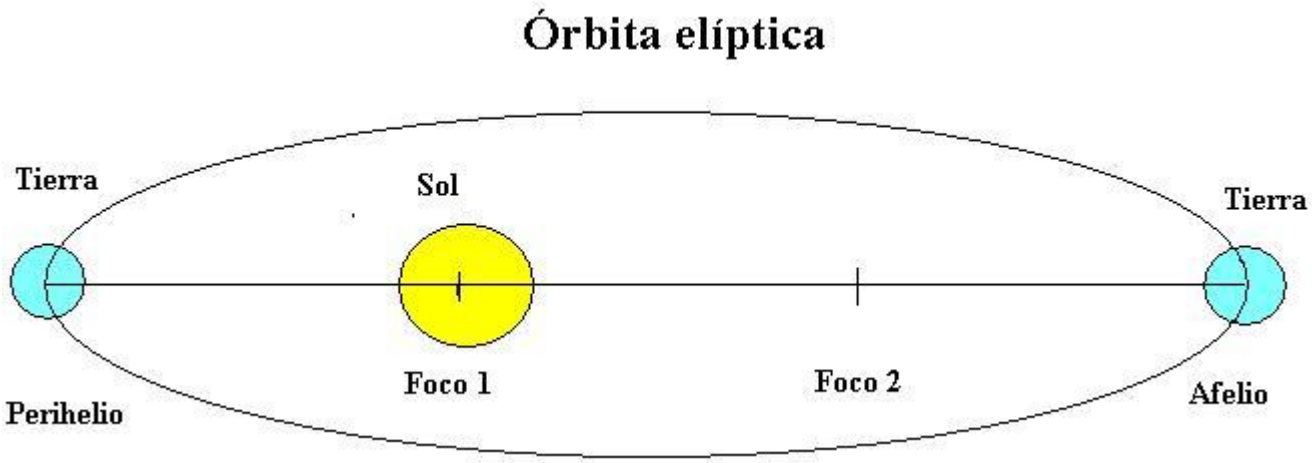
$$\frac{d^2V_{ef}}{dr^2} = \frac{3l^2}{mr_0^4} - \frac{2k}{r_0^3}e^{-\frac{r_0}{a}} - \frac{k}{r_0^2 a}e^{-\frac{r_0}{a}} \longrightarrow \frac{l^2}{mr_0} - ke^{-\frac{r_0}{a}} = 0$$

Analizar estabilidad

$$\frac{d^2V_{ef}}{dr^2} = \frac{k}{r_0^3}e^{-\frac{r_0}{a}} - \frac{k}{r_0^2 a}e^{-\frac{r_0}{a}} > 0 \longrightarrow$$ Voy a pedir esto

Solo vale si $\longrightarrow r_0 < a$

Calcular la fase



¿Qué nos está planteando el ejercicio?

Calculando la fase

Siempre planteamos $\longrightarrow \omega_\theta \tau = 2\pi$

Esta vez nos dicen que $\longrightarrow \omega_\theta \tau_r = 2\pi + \Delta$

$$\omega_\theta \frac{2\pi}{\omega_r} = 2\pi + \Delta \longrightarrow$$ ¿Cómo calculan las frecuencias?

Viejo y conocido Taylor

$$r_0 << a$$

$$V_{ef} \sim V_0 + \frac{dV_{ef}}{dr}(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2V_{ef}}{dr^2}(r_0)(r - r_0)^2$$

$$V_{ef} \sim V_0 + \frac{1}{2}(\frac{a - r_0}{r_0 a})\frac{k}{r_0^2}e^{-\frac{r}{a}}(r - r_0)^2$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k(a - r_0)}{r_0^3 m a}e^{-\frac{r_0}{2a}}}$$

Frecuencia en θ

$$\omega_\theta = \frac{l}{mr_0^2} \longrightarrow l = \sqrt{mr_0k}e^{-\frac{r_0}{2a}} \longrightarrow$$ Sale de la ecuación del punto “a”

$$\omega_\theta = \frac{\sqrt{mr_0k}}{mr_0^2}e^{-\frac{r_0}{2a}}$$

$$\boxed{\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{a}} \sim 1 - \frac{r_0}{2a}}$$

Finalmente

$$\omega_\theta \frac{2\pi}{\omega_r} = 2\pi + \Delta$$

$$2\pi(1 + \frac{r_0}{2a}) = 2\pi + \Delta$$

$$\boxed{\Delta = \frac{\pi r_0}{a}}$$