# Repaso Parcial 2

## Ecuaciones de Hamilton y Transformaciones Canónicas

## Enunciado

**P2.** (3 puntos) Dado el siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{[p_x - \alpha t^2 (x-y)]^2}{2} + \frac{[p_y + \alpha t^2 (x-y)]^2}{2} - \alpha t (x-y)^2$$

a) Plantear las ecuaciones de Hamilton correspondientes (no las resuelva).
b) Usando los corchetes de Poisson pruebe que la siguiente transformación *dependiente del tiempo* es canónica:

$$q_1 = x, \quad p_1 = p_x - \alpha t^2 (x-y)\,, \quad q_2 = y, \quad p_2 = p_y + \alpha t^2 (x-y)$$

c) Encuentre la función generatriz $F_2$ de la transformación canónica propuesta.
d) Escriba el nuevo hamiltoniano y resuelva las nuevas ecuaciones de Hamilton. Emplee esto para encontrar la solución general del problema original.

## Resolución

## Inciso (a)

No hay mucha vuelta que dar en este primer inciso, simplemente planteamos las ecuaciones de Hamilton **sin resolverlas**

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \tag{1}$$

Derivamos entonces para cada par de coordenadas conjugadas

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} &= \dot{p}_x = \alpha t^2 \left[(p_x - p_y) + 2(x-y)(1-\alpha t^3)\right] \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} &= \dot{x} = p_x - \alpha t^2 (x-y)
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} &= \dot{p}_y = -\alpha t^2 \left[(p_x - p_y) + 2(x-y)(1-\alpha t^3)\right] \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} &= \dot{y} = p_y + \alpha t^2 (x-y)
\end{aligned}
$$

# Inciso (b)

En este segundo ítem, lo único que debemos hacer es aplicar los corchetes de Poisson al nuevo par de coordenadas conjugadas con respecto al viejo par y ver que se satisfacen las relaciones

$$
\begin{cases}
\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \\
\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}
\end{cases} \tag{3}
$$

Para ello, veamos lo siguiente

$$
\{q_1, p_1\} = \frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial p_1}{\partial p_x} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial p_1}{\partial p_y} - \frac{\partial q_1}{\partial p_x}\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial p_y}\frac{\partial p_1}{\partial y} \tag{4}
$$

Como $q_1 = x$, es fácil ver que todos los términos salvo el primero se anulan, resultando en que

$$
\{q_1, p_1\} = \frac{\partial p_1}{\partial p_x} = 1 \tag{5}
$$

que es precisamente lo que esperamos de una transformación canónica. De forma análoga, se obtiene también que

$$
\{q_2, p_2\} = \frac{\partial p_2}{\partial p_y} = 1 \tag{6}
$$

Por otro lado, también es fácil ver que

$$
\{q_1, q_2\} = \{x, y\} = 0 \tag{7}
$$

ya que el par $x, y$ son las coordenadas canónicas originales.

Por último, aprovechando a linealidad de los corchetes y los resultados ya obtenidos, se puede reescribir el que nos queda como

$$
\begin{aligned}
\{p_1, p_2\} &= \{p_x, p_2\} - \alpha t^2 \cancelto{0}{\{x, p_2\}} + \alpha t^2 \{y, p_2\} \\
&= \cancel{\{p_x, p_y\}} + \alpha t^2 \underbrace{\boxed{\{p_x, x\}}}_{= -1} - \alpha t^2 \cancelto{0}{\{p_x, y\}} + \alpha t^2 \underbrace{\boxed{\{y, p_y\}}}_{=1} + \alpha t^2 \cancelto{0}{\{y, x - y\}}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Con estos resultados, verificamos que la transformación es efectivamente canónica.

# Inciso (c)

Ahora debemos hayar la fucnión generatriz $F_2(q_i, P_i)$ de la transformación propuesta. Para ello, recordamos las propiedades que deben satisfacer sus derivadas

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\
\dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i
\end{cases}
\tag{9}
$$

Entonces, debemos reescribir los momentos *viejos* en términos de las nuevas variables y obtenemos que

$$
\begin{cases}
(\mathrm{I}) \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = p_x = p_1 + \alpha t^2 (x - y) \\
(\mathrm{II}) \dfrac{\partial F_2}{\partial y} = p_y = p_2 - \alpha t^2 (x - y) \\
(\mathrm{III}) \dfrac{\partial F_2}{\partial p_1} = q_1 = x \\
(\mathrm{IV}) \dfrac{\partial F_2}{\partial p_2} = q_2 = y
\end{cases}
\tag{10}
$$

Integrando la última ecuación (IV) por $p_2$, tenemos que

$$F_2 = yp_2 + C(x, y, p_1) \tag{11}$$

Si derivamos esta expresión, obtenemos en la anteúltima igualdad (III) que

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_1} = \frac{\partial C(x, y, p_1)}{\partial p_1} = x \Rightarrow C(x, y, p_1) = xp_1 + C'(x, y) \tag{12}$$

Tenemos entonces que $F_2 = xp_1 + yp_2 + C'(x, y)$. Ahora, derivamos $F_2$ con respecto a $x$ y usamos la primer ecuación (I)

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = p_1 + \alpha t^2(x - y) = p_1 + \frac{\partial C'(x, y)}{\partial x} \Longleftrightarrow C'(x, y) = \alpha t^2(x^2/2 - yx) + C''(y) \tag{13}$$

Y por último, derivamos la ecuación que nos queda (II) obtenemos

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = p_2 - \alpha t^2(x - y) = p_2 - \alpha t^2 x + \frac{\partial C''(y)}{\partial y} \Longleftrightarrow \alpha t^2 y = \frac{\partial C''(y)}{\partial y} \Longleftrightarrow C''(y) = \alpha t^2 y^2/2 \tag{14}$$

Por lo tanto, llegamos a que

$$F_2 = xp_1 + yp_2 + \frac{\alpha t^2}{2}(x - y)^2 \tag{15}$$

# Inciso (c)

Por último, nos piden escribir el nuevo Hamiltoniano y resolver sus ecuaciones. Para ello, basta recordar que

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H} = \frac{dF_2}{dt} \tag{16}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \alpha t(x-y)^2 = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} \tag{17}$$

*Nota: es importante que el nuevo Hamiltoniano esté escrito en las nuevas coordenadas!*

El Hamiltoniano que nos quedó es mucho más simple!. Con sólo verlo, sabemos que $p_1$ y $p_2$ serán constantes ya que

$$\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = 0 \Longrightarrow p_i = cte \tag{18}$$

Por otro lado, se tiene que el movimiento de las coordenadas $q_1$ e $q_2$ sera un MRU

$$\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p_i} = \dot{q}_i = p_i \Longrightarrow q_i = p_i t + \delta_i \tag{19}$$

Donde las constantes $\delta_i$ son precisamente las condiciones iniciales de $q_1 = x$ e $q_2 = y$ (es decir, $x(t=0) = \delta_1$ y $y(t=0) = \delta_2$).

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x = p_1 t + \delta_1 &\longrightarrow p_x = p_1 + \alpha t^2(p_1 - p_2)t + \Delta \\ y = p_2 t + \delta_2 &\longrightarrow p_y = p_2 - \alpha t^2(p_1 - p_2)t + \Delta \end{aligned} \tag{20}$$

con $\Delta = \delta_1 - \delta_2$.