Guía 5: Cuerpo Rígido

Mecánica Clásica
2do Cuatrimestre de 2021
Sebastián E. Nuza

Ejercicio 14

Utilizando las *ecuaciones de Euler* muestre que cuando un cuerpo rígido (CR) rota alrededor de un eje con momento de inercia máximo o mínimo, su movimiento es relativamente estable, mientras que cuando lo hace alrededor del eje de momento intermedio el movimiento es inestable.

Bueno, antes de empezar recordemos de dónde salían las *ecuaciones de Euler*.

Repaso: Sabemos que si O es un punto fijo en un *sistema inercial* S o el centro de masa (CM) de un cuerpo siempre podemos escribir

$$\left.\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}\right|_S = \boldsymbol{\tau}_O^{\text{ext}}$$

La relación entre un sistema S *fijo al espacio* y otro S' que *rota con el cuerpo* es[a]

$$\left.\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}\right|_{S'} + \left.\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{L}_O\right|_{S'} \tag{1}$$

Tomando los *ejes principales de inercia* para los versores fijos al cuerpo $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$, usando que el momento angular desde O en esa base es

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{I}_O\,\boldsymbol{\Omega} = I_{O,1}\Omega_1\,\hat{\mathbf{1}} + I_{O,2}\Omega_2\,\hat{\mathbf{2}} + I_{O,3}\Omega_3\,\hat{\mathbf{3}} \qquad \left(\Rightarrow\ \left.\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}\right|_{S'} = \mathbf{I}_O\left.\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right|_{S'}\right)$$

y reemplazando en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\tau_{O,1}^{\text{ext}} &= I_{O,1}\dot{\Omega}_1 + (I_{O,3} - I_{O,2})\,\Omega_2\Omega_3 \\
\tau_{O,2}^{\text{ext}} &= I_{O,2}\dot{\Omega}_2 + (I_{O,1} - I_{O,3})\,\Omega_1\Omega_3 \\
\tau_{O,3}^{\text{ext}} &= I_{O,3}\dot{\Omega}_3 + (I_{O,2} - I_{O,1})\,\Omega_1\Omega_2
\end{aligned}$$

Estas son las llamadas *ecuaciones de Euler* y valen siempre que el punto O sea igual a un punto fijo del CR o su centro de masa (CM). Notar que los términos $(I_i - I_j)\,\Omega_i\Omega_j$ aparecen como resultado de la rotación del sistema de ejes fijo al cuerpo respecto de uno *fijo al espacio*.

[a]Como ya vimos varias veces usamos el *teorema de la derivada relativa* para transformar derivadas entre sistemas fijos y rotantes.

Volvamos ahora al problema. La idea es entonces estudiar el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio uniforme y analizar la estabilidad de su rotación si inicialmente gira alrededor de un *eje principal de inercia*. Para escribir las ecuaciones de Euler elegimos como punto de referencia al CM del cuerpo que es donde está aplicado el peso. En ese caso, las tres componentes del torque serán nulas y se simplifica el sistema de ecuaciones, es decir

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\Omega_2\Omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\Omega_1\Omega_3 &= 0 \\ I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\Omega_1\Omega_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Supongamos ahora que la velocidad angular del CR es casi paralela a uno de los ejes principales, digamos al eje 1, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \Omega_0 + w_1(t) \\ \Omega_2(t) &= w_2(t) \\ \Omega_3(t) &= w_3(t) \end{aligned}$$

en donde $|w_i| \ll |\Omega_0|$ son perturbaciones en las distintas componentes de la velocidad angular. O sea, lo que estamos diciendo es que la velocidad angular *inicial* será, esencialmente, $\mathbf{\Omega} \simeq \Omega_0\,\hat{\mathbf{1}}$. Si reemplazamos las velocidades angulares $\Omega_i(t)$ en el sistema de ecuaciones (2) obtenemos

$$\begin{aligned} I_1\dot{w}_1 + (I_3 - I_2)\,w_2(t)w_3(t) &= 0 \\ I_2\dot{w}_2 + (I_1 - I_3)\,(\Omega_0 + w_1(t))\,w_3(t) &= 0 \\ I_3\dot{w}_3 + (I_2 - I_1)\,(\Omega_0 + w_1(t))\,w_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Como los términos $w_iw_j \sim \mathcal{O}(w^2)$ son perturbaciones de orden superior los podemos despreciar. En ese caso el sistema queda

$$I_1\dot{w}_1 = 0 \;\Rightarrow\; w_1(t) = \text{constante} \;\Rightarrow\; \Omega_1 \simeq \Omega_0 \tag{3}$$

$$I_2\dot{w}_2 + (I_1 - I_3)\,\Omega_0 w_3(t) = 0 \tag{4}$$

$$I_3\dot{w}_3 + (I_2 - I_1)\,\Omega_0 w_2(t) = 0 \tag{5}$$

Derivando (4) y reemplazando en (5) obtenemos

$$\boxed{\ddot{w}_2(t) + \omega^2 w_2(t) = 0} \tag{6}$$

en donde $\omega^2 \equiv \Omega_0^2(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)/I_2I_3$. Si $\omega^2 > 0$ la solución para $w_2(t)$ será oscilatoria (queda la ecuación de un oscilador armónico).

De la ecuación (4) es fácil ver que si la función $w_2(t)$ es oscilatoria, entonces $w_3(t)$ también lo es. En consecuencia, si tanto $w_2(t)$ como $w_3(t)$ son funciones del tiempo acotadas, las componentes 2 y 3 de la velocidad angular permanecerán chicas y el movimiento será estable. Entonces, el cuerpo rotará, aproximadamente, alrededor del eje 1 durante todo el movimiento. Por el contrario, si $\omega^2 < 0$ las soluciones $w_{2,3}(t)$ divergen con el tiempo y el vector velocidad angular total se apartará del eje 1 desarrollando un comportamiento más complejo.

> **Nota**: ¡Ojo! Las soluciones que encontramos son válidas únicamente mientras $|w_i| \ll |\Omega_0|$.

Veamos todos los casos posibles:

- Si $I_1 > I_2 > I_3 \;\Rightarrow\; \omega^2 > 0$ (estable): el momento de inercia I_1 es **máximo**.
- Si $I_1 < I_2 < I_3 \;\Rightarrow\; \omega^2 > 0$ (estable): el momento de inercia I_1 es **mínimo**.
- Si $I_2 > I_1 > I_3 \;\Rightarrow\; \omega^2 < 0$ (inestable): el momento de inercia I_1 es **intermedio**.
- Si $I_3 > I_1 > I_2 \;\Rightarrow\; \omega^2 < 0$ (inestable): el momento de inercia I_1 es **intermedio**.

Los últimos dos casos representan la misma situación física.