Mecánica Clásica - Guía 5: Cinemática y Dinámica del Cuerpo Rígido, Ángulos de Euler, Ecuaciones de Euler.

Federico Petrovich

14 de Octubre de 2021

Problema 2

Primero que nada, se ubicará al triangulo de forma tal de que el vértice del ángulo recto se ubique en el origen de coordenadas del plano xy (ver Figura 1). Teniendo esto en cuenta, el triangulo queda definido por la intersección de las rectas $x=0$, $y=0$, $y=a-x$.

Habiendo hecho eso, la masa del triangulo está dada por

$$M=\int\sigma dS=\sigma\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy=\sigma\int_0^a dx\,(a-x)=\sigma\frac{a^2}{2}. \tag{1}$$

En este caso el resultado es trivial ya que la expresión para la superficie de un triangulo es muy conocida, pero para cuerpos más complejos hay que resolver la integral.

En cuanto al centro de masa, el mismo está dado por

$$\begin{aligned}\overline{r}_{CM}&=\tfrac{\int\overline{r}\sigma dS}{M}=\tfrac{\sigma}{M}\left[\left(\int xdS\right)\hat{x}+\left(\int ydS\right)\hat{y}\right]=\tfrac{\sigma}{M}\left[\left(\int_0^a dxx\int_0^{a-x}dy\right)\hat{x}+\left(\int_0^a dx\int_0^{a-x}dyy\right)\hat{y}\right]\\&=\tfrac{\sigma}{M}\left\{\left[\int_0^a dxx\,(a-x)\right]\hat{x}+\left[\int_0^a dx\tfrac{(a-x)^2}{2}\right]\hat{y}\right\}=\tfrac{\sigma}{M}\left(\tfrac{a^3}{6}\hat{x}+\tfrac{a^3}{6}\hat{y}\right)=\tfrac{a}{3}\hat{x}+\tfrac{a}{3}\hat{y}.\end{aligned} \tag{2}$$

Notar que por simetría, ya se sabía que la posición del centro de masa en x y en y debía ser la misma, por lo que se podría haber hecho solo una de las dos integrales. En la Figura 1 se puede observar la posición del centro de masa dentro del triángulo.

Finalmente, para obtener lo pedido por el ejercicio, recordar que la expresión general para el tensor de inercia respecto de un punto o está dada por

$$I_{kl}^o=\int\rho\left(\overline{r}\right)\left[\left|\overline{r}\right|^2\delta_{kl}-r_kr_l\right]d^3r, \tag{3}$$

donde $\overline{r}$ es la posición respecto a o. En este caso en particular, se va a calcular primero el momento de inercia respecto al origen y por ende se tiene que

$$I_{kl}^o=\sigma\int\left[\left|\overline{r}\right|^2\delta_{kl}-r_kr_l\right]dS, \tag{4}$$

donde $\overline{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$.

Para no hacer cuentas extra, notar en primer lugar que x e y son simétricos, lo cual implica $I_{xx}=I_{yy}$. Además, notar que $I_{xz}=I_{yz}=0$ (y como el tensor es simétrico también $I_{zx}=I_{zy}=0$. Por ende, solo basta con calcular I_{xx}, I_{xy}, I_{zz}. Se tiene que

$$I_{xx}^o=\sigma\int\left(\left|\overline{r}\right|^2-r_x^2\right)dS=\sigma\int y^2dS=\sigma\int_0^a dx\int_0^{a-x}dyy^2=\frac{\sigma}{3}\int_0^a dx\,(a-x)^3=\frac{\sigma a^4}{12}=\frac{Ma^2}{6}, \tag{5}$$

$$I_{xy}^o=-\sigma\int xydS=-\sigma\int_0^a dxx\int_0^{a-x}dyy=-\frac{\sigma}{2}\int_0^a dxx\,(a-x)^2=-\frac{\sigma a^4}{24}=-\frac{Ma^2}{12}, \tag{6}$$

$$I_{zz}^o=\sigma\int\left|\overline{r}\right|^2dS=\sigma\int\left(r_x^2+r_y^2\right)dS=\sigma\int\left(x^2+y^2\right)dS=\frac{Ma^2}{3}. \tag{7}$$

Luego, se tiene que

$$\overline{\overline{I}}^o=\frac{Ma^2}{12}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Habiendo hecho esto, para calcular el tensor de inercia respecto al centro de masa utilizamos el teorema de Steiner

$$I_{kl}^{CM}=I_{kl}^o-M\left[\left|\overline{d}\right|^2\delta_{kl}-d_kd_l\right], \tag{9}$$

donde

$$\overline{d} = \overline{r}_o - \overline{r}_{CM}. \tag{10}$$

En nuestro caso particular,

$$\overline{d} = -\left(\frac{a}{3}\hat{x} + \frac{a}{3}\hat{y}\right) \tag{11}$$

y por ende

$$I_{xx}^{CM} = I_{xx}^{o} - Md_y^2 = \frac{Ma^2}{6} - \frac{Ma^2}{9} = \frac{Ma^2}{18}, \tag{12}$$

$$I_{xy}^{CM} = I_{xy}^{o} + Md_xd_y = -\frac{Ma^2}{12} + \frac{Ma^2}{9} = \frac{Ma^2}{36}, \tag{13}$$

$$I_{zz}^{CM} = I_{zz}^{o} - M\left(d_x^2 + d_y^2\right) = \frac{Ma^2}{3} - \frac{Ma^2}{9} - \frac{Ma^2}{9} = \frac{Ma^2}{9}. \tag{14}$$

Queda entonces

$$\overline{\overline{I}}^{CM} = \frac{Ma^2}{36}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overline{\overline{I}}^{o}. \tag{15}$$

Finalmente, para hallar los ejes principales de inercia, hay que encontrar la base en la cual el tensor es diagonal. Para ello, hay que hallar los autovectores de la matriz, que resultan ser

$$\hat{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{y} + \hat{x}\right),\ \hat{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{y} - \hat{x}\right),\ \hat{3} = \hat{z}. \tag{16}$$

Notar que estos nuevos ejes son una rotación de 45° alrededor del eje z (en dirección antihoraria) de los ejes originales (que son los cartesianos), como se muestra en la Figura 1. En la figura, también se puede observar que era bastante predecible que los ejes principales de inercia debían ser esos por una cuestión de simetría.

Por último, los autovalores correspondientes son $I_1 = \frac{Ma^2}{36}$, $I_2 = \frac{Ma^2}{12}$, $I_3 = \frac{Ma^2}{9}$ y por lo tanto el tensor de inercia en esa base está dado por

$$\overline{\overline{I}}^{CM} = \frac{Ma^2}{36}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

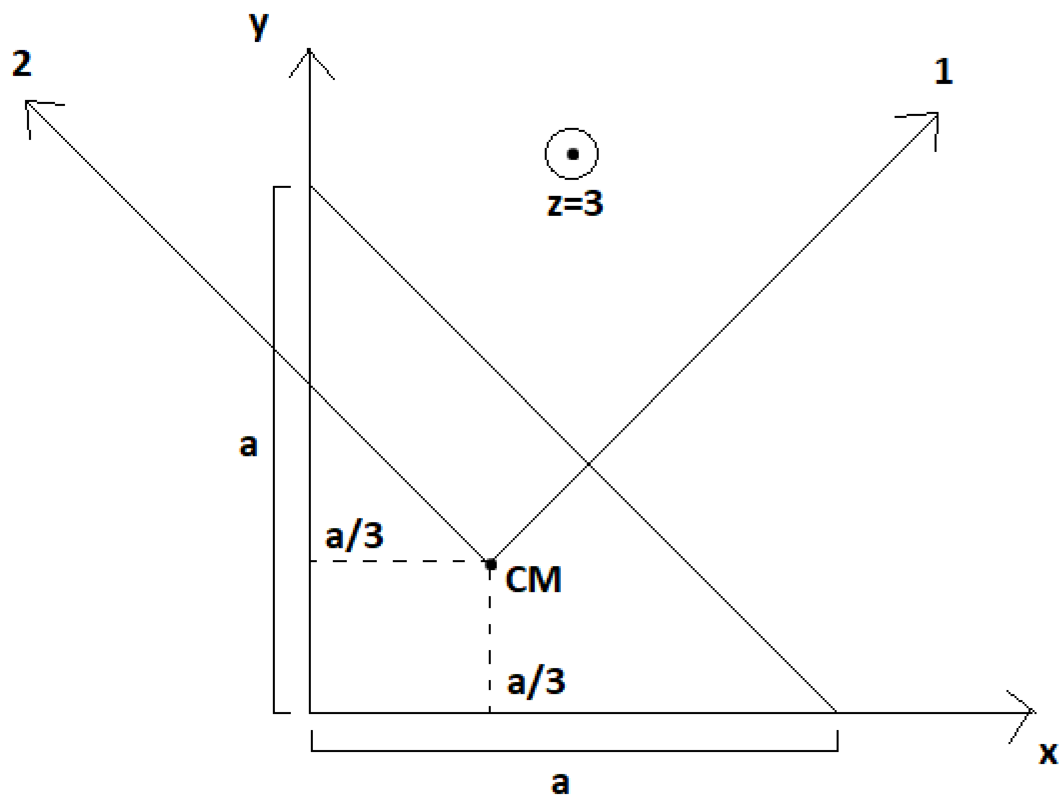

Figura 1: Sistema de referencia, posición del centro de masa y ejes principales de inercia.