

Guía 6a - Hamiltoniano

REPASO TEÓRICO

Hasta ahora vimos dos métodos que existen para resolver la mecánica de un sistema. En F1 vimos como aplicar las ecuaciones de Newton (Newton: *Principia Mathematica* de 1687) y en esta materia aprendimos a usar el método Lagrangiano (Lagrange: *Méchanique Analytique* de 1788). Para ir de uno a otro, la idea fue pasar de m coordenadas r_m , a $n = m - k$ coordenadas generalizadas q_n en presencia de k vínculos. De esta manera no lidiamos con las fuerzas de vínculo, lo cual resulta muy útil cuando trabajamos con sistemas que involucran fuerzas conservativas (pero el método está en desventaja si por ejemplo hay fuerzas disipativas).

Existe un tercer método que es el método Hamiltoniano (Hamilton: 1834), el cual se basa en el mismo principio variacional de Hamilton (o de mínima de acción) que el método Lagrangiano. En principio no existen muchas diferencias entre ambos para resolver un problema, y ambos nos dan la misma cantidad de información, así que uno se suele preguntar para qué sirve. Menciono algunas ventajas. Una es que lidiamos con la cantidad \mathcal{H} que suele ser una cantidad conservada y por lo tanto observable, a diferencia de \mathcal{L} que es más abstracto. En general con \mathcal{H} es más fácil ver con las simetrías y las cantidades conservadas. Otra ventaja es que debemos resolver ecuaciones diferenciales de menor grado (aunque son más ecuaciones), lo cual numéricamente es más conveniente. Y la ventaja principal es que da un marco de trabajo para desarrollar teorías en muy diversas áreas. Esta aplicación escapa a lo que vemos en esta materia, pero el método Hamiltoniano resulto muy útil para describir sistemas en astrofísica y física del plasma, en mecánica estadística ($\text{Prob} \propto e^{-\mathcal{H}/kT}$), y fue la puerta de entrada al desarrollo de la teoría de la mecánica cuántica no-relativista (mejor usar momento que velocidad). Sin embargo, en relatividad el tiempo se mezcla con el espacio, el tiempo no es especial. Para teorías relativistas conviene usar el formalismo Lagrangiano, ya que el Hamiltoniano le da un lugar privilegiado al tiempo.

La idea es pasar de las $2n$ variables $(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ del Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, que describen el estado del sistema mediante un punto en el **espacio de configuración**, a las $2n$ variables $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ del Hamiltoniano $\mathcal{H}(q, p, t)$, que son puntos en el **espacio de fases**. A p_i se la define como el momento conjugado de q_i

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

Para lograr ese objetivo la idea es hacer simplemente una transformación de Legendre (pueden leer sobre ella en la sección 8.1 del Goldstein o en internet o en F4) definiendo la función

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

Si diferenciamos

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{H} &= d\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i + \cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt\right) \\
 &= dp_i\dot{q}_i - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt
 \end{aligned} \tag{3}$$

Vemos que el Hamiltoniano es una función de (q, p, t) , donde p se obtiene invirtiendo la ecuación (1). Si diferenciamos respecto de las variables que depende (regla de la cadena), podemos igualar componente a componente

$$d\mathcal{H} = \underbrace{-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i}_{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}} + \underbrace{\dot{q}_i dp_i}_{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}} - \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}dt}_{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}dt \tag{4}$$

La idea de este método es que podemos pasar de n ecuaciones diferenciales de segundo orden en $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ a $2n$ ecuaciones de primer orden. Para ello necesitaremos usar que, de la ecuación de E-L,

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \tag{5}$$

Resumiendo:

ECUACIONES DE HAMILTON

1. Encontrar $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$.
2. Definiendo $p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$ obtenemos $p(q, \dot{q}, t)$. Invertiendo hallamos \dot{q} en función p .
3. Usando $\dot{q}(q, p, t)$ encontrar $\mathcal{H}(q, p, t) = p\dot{q}(q, p, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t)$.
4. La dinámica se describe mediante las $2n$ ecuaciones de Hamilton (1° orden).

$$\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \dot{\mathcal{H}} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \tag{6}$$

Si alguna coordenada q_i es cíclica, su momento conjugado p_i se conserva. La misma relación hay entre \mathcal{H} y t (en Noether vimos la conservación de h asociada la homogeneidad del tiempo). Si el Hamiltoniano (o el Lagrangiano) no depende explícitamente del tiempo, $\mathcal{H}(q, p, t) = h$ se conserva y es la constante h que definíamos antes, y que en muchos casos suele coincidir con la energía.

Noten que distingo entre \mathcal{H} y h . El Hamiltoniano es un ente abstracto del cual derivan las ecuaciones, está en el plano teórico. No puedo volver a meter los resultados de las ecuaciones en \mathcal{H} porque estaría cambiando el sistema (lo mismo pasaba con \mathcal{L}). En cambio h es una ecuación de conservación que deriva de \mathcal{H} , está en el plano práctico. Acá si puedo combinar la ecuación de h con las ecuaciones de Hamilton.

Para hallar las ecuaciones de Hamilton partimos del Lagrangiano haciendo una transformación de Legendre, pero es importante que las ecuaciones también se pueden obtener a partir del principio variacional de Hamilton que extremiza la acción

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \frac{dq_i}{dt} - \mathcal{H} \right) dt = \dots \quad (7)$$

$$= p_i dq_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) \delta p_i - \left(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right) \delta q_i \right] \quad (8)$$

Si graficamos el diagrama de fases en el espacio (q, p) , entonces sabemos hacia donde evolucionará cada punto ya que su derivada viene dada por $(\dot{q}, \dot{p}) = (\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q})$. Toda la dinámica está contenida en el diagrama de fases, puede leerse de él la evolución temporal del sistema; esa es una de sus ventajas.

Ejercicio 1.b

Nos piden hallar el Hamiltoniano y sus ecuaciones para una partícula en un potencial central $V(r)$. Recordemos de la guía 3 que en este tipo de potenciales el torque $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ se anula y \mathbf{L} se conserva en magnitud y dirección, que elegimos en \hat{z} . Como $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0 \Rightarrow \mathbf{r} \perp \hat{z}$, el movimiento es plano y usamos coordenadas polares. Ya estamos familiarizados con el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \quad (9)$$

Lo primero es obtener los momentos conjugados de la definición e invertir las relaciones para hallar \dot{q} en función de p

$$\begin{cases} p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \end{cases} \xrightarrow{\text{Invirtiendo}} \begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \end{cases} \quad (10)$$

Reemplazando estas definiciones en el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q, p, t) &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = p_r\frac{p_r}{m} + p_\theta\frac{p_\theta}{mr^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2\frac{p_\theta^2}{m^2r^4}\right) + V(r) \\ \Rightarrow \mathcal{H}(q, p, t) &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r) \end{aligned} \quad (11)$$

Un comentario aquí que sera útil después. Observen que p_θ es el momento conjugado de un ángulo, y tiene unidades de momento angular (en vez de lineal). En \mathcal{H} aparece dividido por r para mantener las unidades. Si lo escribiésemos como un vector en 3D tendríamos

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p} = p_x\hat{x} + p_y\hat{y} + p_z\hat{z} & \left| \right. & \mathbf{p} = p_r\hat{r} + \frac{p_\theta}{r}\hat{\theta} + p_z\hat{z} \\ \text{Cartesianas} & & \text{Cilíndricas} \end{array} \quad \left| \right. \quad \begin{array}{c} \mathbf{p} = p_r\hat{r} + \frac{p_\theta}{r}\hat{\theta} + \frac{p_\phi}{r\sin\theta}\hat{\phi} \\ \text{Esféricas} \end{array} \quad (12)$$

De \mathcal{H} hallamos la dinámica resolviendo las ecuaciones de Hamilton. Como θ es cíclica, recuperamos la conservación de momento angular en z .

$$\begin{cases} \dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p_\theta = \ell = cte \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \Rightarrow \ell = mr^2\dot{\theta} \end{cases} \quad (13)$$

En cuanto a r

$$\begin{cases} \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \end{cases} \Rightarrow m\ddot{r} = \frac{\ell}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \quad (14)$$

Noten que las ecuaciones de Hamilton son de primer orden; combinándolas entre ellas es que recuperamos las ecuaciones diferenciales de segundo orden que obteníamos con el Lagrangiano. Para resolver el problema habría que encontrar una solución a estas ecuaciones. Una opción más simple es utilizar las cantidades conservadas. Como \mathcal{H} no depende explícitamente del tiempo, la función h se conserva

$$\dot{\mathcal{H}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = h = E = T + V \quad (15)$$

En este caso h es la energía debido a que la cinética es homogénea de grado dos y el potencial no depende de las velocidades. Otra forma es calcular $E = T + V$ y ver que obtenemos la misma expresión que para h .

Para el caso particular del potencial de Kepler, podemos dibujar el diagrama de fases en el espacio (r, p_r) escribiendo a p_r como función de r a partir de la conservación de la energía y momento angular

$$p_r = \pm \sqrt{2mE - \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{2mk}{r}} \quad (16)$$

Lo malo de esto que suele ser difícil graficar este tipo de funciones a mano. La idea es que podamos hacer un gráfico cualitativo. Para ello podemos ayudarnos usando el gráfico del potencial efectivo ya que para cada valor de r podemos ver cualitativamente cuanto vale p_r^2 (en verde), debido a que p_r^2 es lo que le falta a V_{eff} para llegar a E

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + V_{eff} \sim p_r^2 + V_{eff} \quad (17)$$

Por ejemplo en los puntos retorno, $E = V_{eff}$ y $p_r = 0$, así que podemos trazar líneas verticales que para guiarnos. Vemos del V_{eff} de la figura que en el punto de retorno $p_r = 0$, luego p_r^2 crecer hasta volverse máximo en r_c . Luego p_r^2 decrece. Con esto alcanza cualitativamente para graficar el diagrama de fase.

Algo importante es que la información de la evolución temporal está contenida en el diagrama de fases. Indicamos con flechas el sentido de circulación, que está determinado por el hecho de que $p_r = m\dot{r}$: la velocidad y el impulso tienen el mismo signo. Si p_r es positivo, r aumenta; si p_r es negativo, r disminuye.

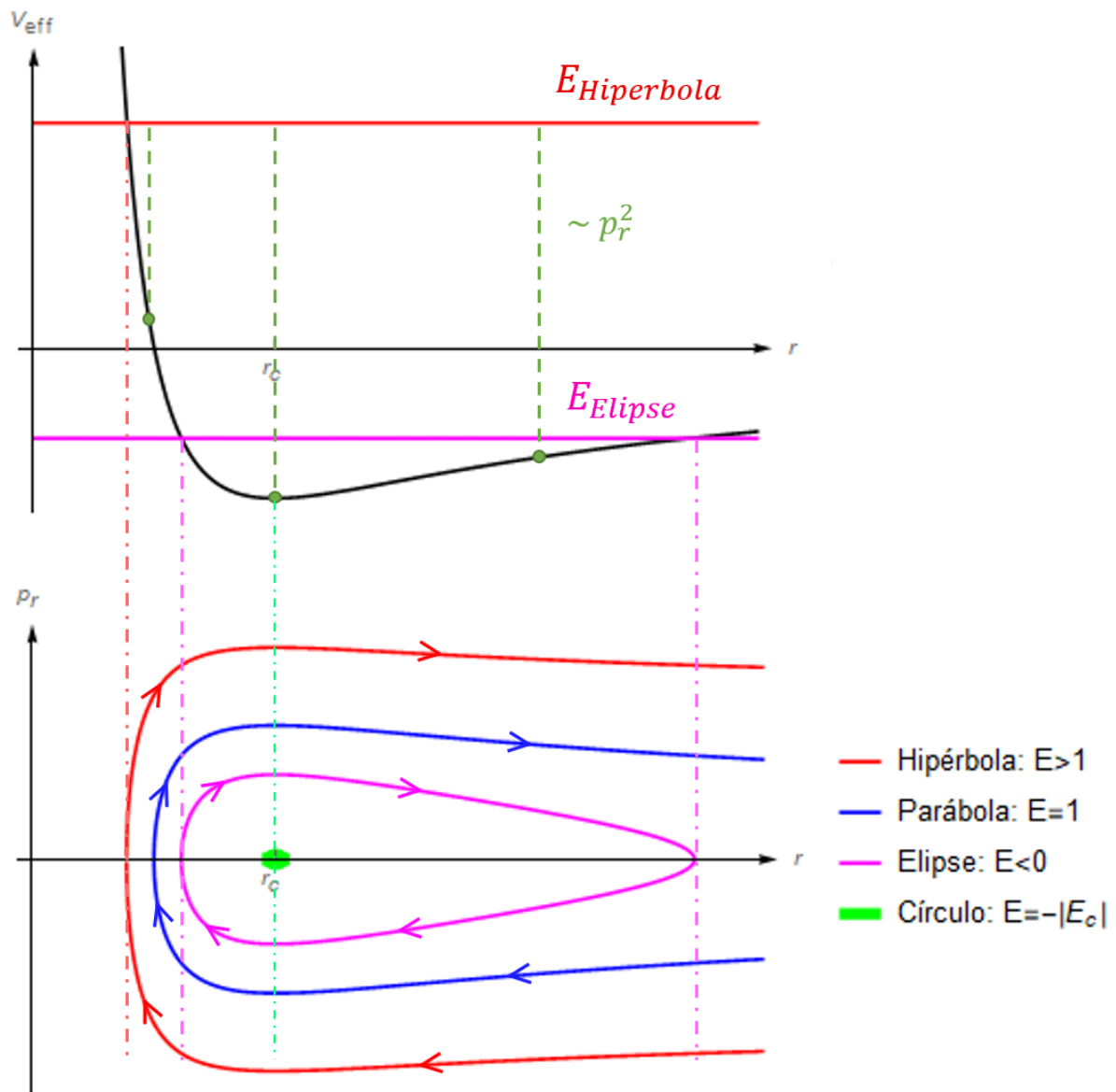


Figura 1: Potencial efectivo y diagrama de fases en el potencial gravitatorio de Kepler.

Ejercicio 2

Nos piden escribir las ecuaciones de Hamilton para un oscilador isótropo tridimensional en coordenadas cilíndricas (les dejo el esférico). Recordemos que el Lagrangiano viene dado por

$$\mathcal{L}(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k}{2}(r^2 + z^2) \quad (18)$$

Ya sabemos que el oscilador armónico oscila con frecuencia natural $\omega^2 = k/m$, así que vamos reemplazando k . El Hamiltoniano ya lo obtuvimos en el ejercicio anterior, solo hay que sumarle el movimiento en z con $p_z = m\dot{z}$. Reemplazando el potencial armónico en la ecuación (11)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q, p, t) &= p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_z \dot{z} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2 \right) + \frac{m\omega^2}{2}(r^2 + z^2) \end{aligned} \quad (19)$$

Nuevamente θ es cíclica y \mathcal{H} no depende explícitamente de t , por lo que $p_\theta = \ell$ y $\mathcal{H} = h = E$ son cantidades conservadas. Las ecuaciones en r y θ son idénticas a las que encontramos en (13), mientras que en z tenemos

$$\dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \quad \dot{p}_z = m\ddot{z} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -m\omega^2 z \quad (20)$$

El diagrama de fases en este caso es más complicado porque aparecen 4 variables en la energía: (r, z, p_r, p_θ) . Sin embargo hay una propiedad que podemos usar. A modo de motivación notemos primero que el Hamiltoniano de la ecuación (19) depende de las variables (r, θ) y z por separado. Podríamos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(r, \theta, z, p_r, p_\theta, p_z) &= \mathcal{H}_1(r, \theta, p_r, p_\theta) + \mathcal{H}_z(z, p_z) \\ \mathcal{H}_1(r, \theta, p_r, p_\theta) &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \frac{m\omega^2}{2} r^2, \quad \mathcal{H}_z(z, p_z) = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} z^2 \end{aligned} \quad (21)$$

El problema está desacoplado y podríamos tratarlo como dos sistemas por separado. En ese caso, como ningún \mathcal{H} depende de t obtendríamos una ecuación de conservación para cada Hamiltoniano por separado ($E = E_1 + E_z$),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(r, \theta, p_r, p_\theta) = E_1 &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{m\omega^2}{2} r^2 = \frac{p_r^2}{2m} + V_r(r) \\ \mathcal{H}_z(z, p_z) = E_z &= \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} z^2 = \frac{p_z^2}{2m} + V_z(z) \end{aligned} \quad (22)$$

Supongamos que no nos avivamos de esto. Veamos como llegar a que E_1 y E_z se conservan por separado a partir de la conservación de energía total, que es

$$E = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{\ell^2}{r^2} + p_z^2 \right) + \frac{m\omega^2}{2}(r^2 + z^2) \quad (23)$$

La clave está en usar el *método de separación de variables*. Si separamos variables a cada lado de la igualdad

$$E - \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{m\omega^2}{2}r^2 = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}z^2 \Rightarrow f(r) = g(z) = E_z = E - E_1 \quad (24)$$

Del lado izquierdo nos queda una función que depende únicamente de r , mientras que el lado derecho solo depende de z . Esta igualdad se debe cumplir para cualquier valor de r y z . La única forma en que eso sea posible es que ambas funciones sean iguales a una constante, que por como hicimos la separación coincide con lo que en (22) definimos como E_z .

Ahora sí podemos despejar cada p en función de su coordenada conjugada

$$\begin{aligned} p_r &= \pm \sqrt{2mE_1 - \frac{\ell^2}{r^2} - m^2\omega^2 r^2} \\ p_z &= \pm \sqrt{2mE_z - m^2\omega^2 z^2} \end{aligned} \quad (25)$$

Esto no tiene muy buena pinta para graficarlo... pero si se fijan bien, la parte en z se puede llevar a una forma más conocida. Ya de la ecuación (24) se ve que tiene la forma de la ecuación de la elipse. Reescribiéndola un poco tenemos

$$\left(\frac{p_z}{\sqrt{2mE_z}} \right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2E_z/m\omega^2}} \right)^2 = \left(\frac{p_z}{P} \right)^2 + \left(\frac{z}{Z} \right)^2 = 1 \quad (26)$$

En la figura 2 se grafican los diagramas de fases para diferentes valores de E_1 y E_z .

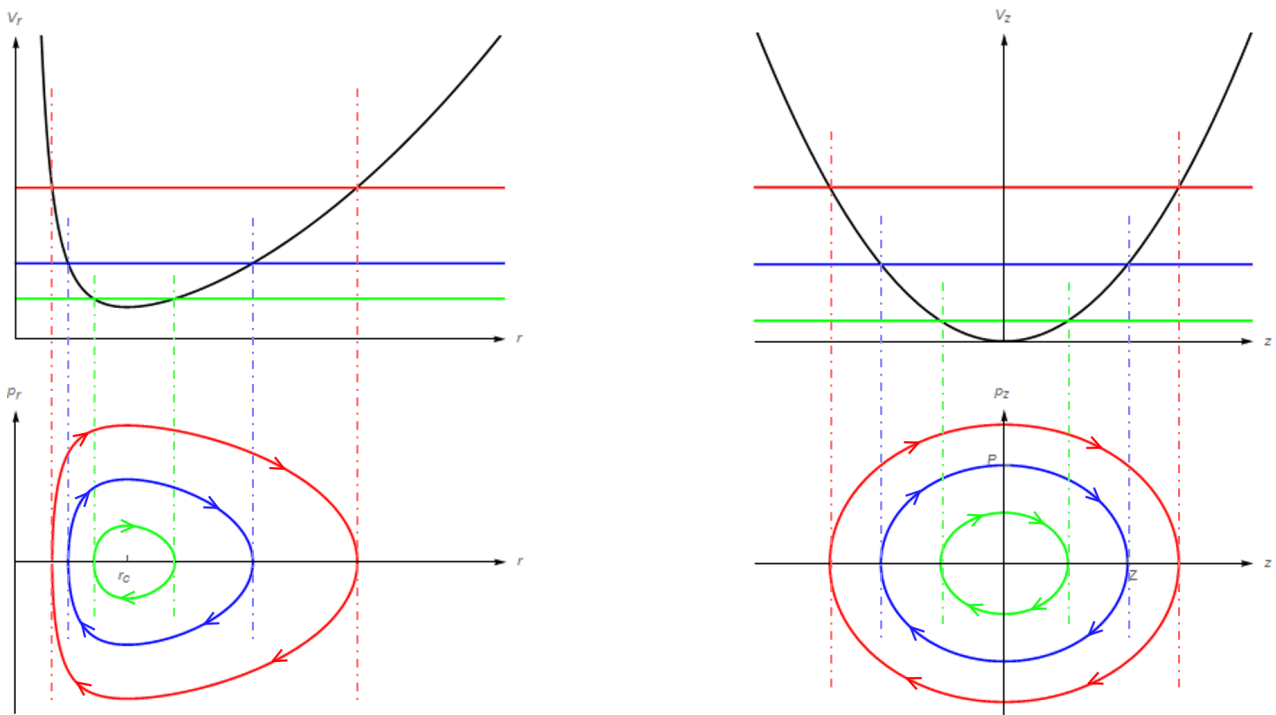


Figura 2: Potencial efectivo y diagrama de fases para r (izquierda) y z (derecha).