Mecánica Clásica - 2c 2021
01/11/2021
Máximo Coppola

Guía 6c - Corchetes de Poisson

Hamiltoniano

La idea de los corchetes de Poisson es que permiten reescribir el formalismo Hamiltoniano de forma compacta y elegante. De hecho se volvieron la manera canónica de cuantizar la mecánica. La idea principal viene de que la evolución temporal de una función cualquiera puede escribirse como (usando las ecuaciones de Hamilton)

$$\dot{f}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{1}$$

Podemos simplificar la notación definiendo el *corchete de Poisson* entre dos funciones arbitrarias como

$$\boxed{[f,g]_{q,p} \equiv \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)} \tag{2}$$

En general en varios libros (o en el apunte de Minotti) encontrarán llaves (más usados en clásica) en vez de corchetes (más usados en cuántica). Notar que los subíndices nos dicen respecto de que variables estamos transformando (muchas veces se omiten para simplificar la notación).

Formalismo Hamiltoniano

$$\dot{f} = [f,\mathcal{H}] + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{q}_i = [q_i,\mathcal{H}] = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = [p_i,\mathcal{H}] = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases} \quad \left(\dot{\mathcal{H}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right) \tag{3}$$

- El corchete entre dos variables canónicas (p es el momento conjugado de q) es

  $$[q_i,q_j]_{q,p} = [p_i,p_j]_{q,p} = 0\,, \quad [q_i,p_j]_{q,p} = \delta_{ij} \tag{4}$$

  Estas igualdades se conocen con el nombre de *corchetes fundamentales*.

- $C(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ será una constante de movimiento si $\dot{C} = 0 \Leftrightarrow [C,\mathcal{H}] = -\frac{\partial C}{\partial t}$.
  Si C no depende explícitamente de t, será constante si $[C,\mathcal{H}] = 0$.

- Teorema de Poisson: Si C_1 y C_2 se conservan $\Rightarrow C_3 = [C_1,C_2]$ también (ej 13.a).

Transformaciones Canónicas

Transformación Canónica (TC)

Una TC: $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \to (\mathbf{Q},\mathbf{P})$ es tal que las variables transformadas mantienen la forma de las ecuaciones de Hamilton:

$$\boxed{\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i}} \qquad \boxed{\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i}} \qquad \boxed{\mathcal{K}(\mathbf{Q},\mathbf{P},t) = \mathcal{H}(\mathbf{q}(\mathbf{Q},\mathbf{P}),\mathbf{p}(\mathbf{Q},\mathbf{P}),t) + \frac{\partial F}{\partial t}} \tag{5}$$

• Función Generatriz

Recordemos brevemente lo que vimos la clase pasada sobre como probar que una transformación es canónica.

TC: Función Generatriz

Una transformación es canónica si existe una función generatriz F_i, que según sea el caso viene dada por

$$\begin{aligned}
F_1(\mathbf{q},\mathbf{Q}) : &\qquad p_i = +\frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\\
F_2(\mathbf{q},\mathbf{P}) = F_1 + \mathbf{P.Q} : &\qquad p_i = +\frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \qquad P_i = +\frac{\partial F_2}{\partial P_i}\\
F_3(\mathbf{p},\mathbf{Q}) = F_1 - \mathbf{p.q} : &\qquad p_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\\
F_4(\mathbf{p},\mathbf{P}) = F_1 - \mathbf{p.q} + \mathbf{P.Q} : &\qquad p_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \qquad P_i = +\frac{\partial F_4}{\partial P_i}
\end{aligned} \tag{6}$$

Encontrar una generatriz no es la única forma de mostrar que una transformación es canónica. También puede mostrarse mediante corchetes de Poisson, condiciones directas, formalismo simpléctico, etc.

• Condiciones Directas

En el ejercicio 8.a), donde nos piden demostrar que frente a una TC se cumple las siguientes igualdades, llamadas *condiciones directas*

TC: Condiciones Directas

Una transformación (independiente del tiempo) es canónica si

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = +\frac{\partial p_j}{\partial P_i}, \qquad \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial P_i}$$
$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = +\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \tag{7}$$

Vamos a asumir que la transformación no depende del tiempo ($\frac{\partial F_i}{\partial t} = 0$). Para demostrar lo que piden reescribimos $\dot{Q}_i$ de dos formas. Por un lado podemos expresar la nueva variable en función de las originales $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ tal que derivando y usando las ecs de Hamilton tenemos

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial Q_i}{\underline{\partial q_j}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\underline{\partial p_j}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \tag{8}$$

Por otro lado podemos hacerlo mismo con el nuevo hamiltoniano, $\mathcal{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \mathcal{H}\left(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\right)$. *Si* la transformación es canónica entonces $\dot{Q}_i$ debe satisfacer la ecuación de Hamilton con $\mathcal{K}$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} \Leftrightarrow \dot{Q}_i = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\underline{\partial P_i}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\underline{\partial P_i}} \right) \tag{9}$$

Igualando las Ecs. (8) y (9) se demuestran las dos primeras condiciones directas que aparecen en (7). Trabajando de forma análoga con la ecuación de Hamilton para $\dot{P}_i$, ustedes pueden demostrar las otras dos identidades que faltan.

Es interesante notar que estas condiciones también salen de asumir que existe una generatriz (una implica la otra). Hallar F_i implica encontrar una función a partir de su gradiente, ver (6). La condición necesaria y suficiente para que exista F_i es la igualdad de las derivadas cruzadas (condición de integrabilidad); estas igualdades implican las ecuaciones (7). Por ejemplo, para F_2 pedimos que (en una dimensión)

$$\frac{\partial^2 F_2(q, P)}{\partial q \partial P} = \frac{\partial^2 F_2(q, P)}{\partial P \partial q} \tag{10}$$

Usando que

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q} = p(q, P) \\ \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P} = Q(q, P) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q(q, P)}{\partial q} = \frac{\partial p(q, P)}{\partial P} \tag{11}$$

• Corchetes de Poisson

Queremos llegar a alguna condición entre corchetes de Poisson que nos indique si una transformación es canónica o no. Una manera es calcular los corchetes fundamentales entre las variables transformadas. Usando las condiciones directas podemos mostrar que

$$[Q_i, P_j]_{q,p} = \sum_{k=1}^{N} \left(\underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}}_{\frac{\partial p_k}{\partial P_i}} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}}_{-\frac{\partial q_k}{\partial P_i}} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial P_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial P_i} + \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial P_i} \right) = \frac{\partial P_j}{\partial P_i} = \delta_{ij} \tag{12}$$

Análogamente se puede mostrar que los otros corchetes se anulan.

TC: Corchetes de Poisson

Una transformación es canónica si

$$[Q_i, Q_j]_{q,p} \; = \; [P_i, P_j]_{q,p} \; = \; 0 \, , \qquad [Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij} \tag{13}$$

Si lo de arriba es cierto, entonces también puede demostrarse que los corchetes son invariantes frente a TC, es decir que para cualquier par de funciones f y g se tiene

$$[f, g]_{q,p} \; = \; [f, g]_{Q,P} \; \equiv \; [f, g] \tag{14}$$

Es decir que otra forma de probar que una transformación es canónica es probar la igualdad de arriba (aunque es más cómodo usar (13)). Este resultado es útil a la hora de calcular conservaciones ya que sabemos que si C es una constante de movimiento entonces $[C, H] = 0$, resultado que es invariante frente a TCs.

• Método Simplético

No lo vamos a usar en la práctica, pero este es de los mejores métodos para unificar y compactar la notación, permitiendo conceptualizar ideas más abstractas. Si le gusta trabajar en forma matricial, en la teórica vieron que

TC: Método Simpléctico

Una transformación es canónica si

$$\mathbb{M}\mathbb{J}\mathbb{M}^T = \mathbb{J} = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{n\times n} & \mathbb{1}_{n\times n} \\ -\mathbb{1}_{n\times n} & \mathbb{0}_{n\times n} \end{pmatrix} \, , \qquad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Ejercicio 9

Como ejemplo, podemos re-chequear que la transformación del ejercicio 9 es canónica usando los corchetes. Fijense que nos dan las variables originales en funcion de las nuevas

$$\begin{aligned} x &= X\cos\lambda + P_y\,\frac{\sin\lambda}{m\omega}\,, \qquad p_x = -m\omega Y\sin\lambda + P_x\cos\lambda \\ y &= Y\cos\lambda + P_x\,\frac{\sin\lambda}{m\omega}\,, \qquad p_y = -m\omega X\sin\lambda + P_y\cos\lambda \end{aligned} \tag{16}$$

Si la transformación es canónica, los corchetes son invariantes, por lo que importa como los calculemos; podemos hacer $[\mathbf{Q},\mathbf{P}]_{q,p}$ o $[\mathbf{q},\mathbf{p}]_{Q,P}$. Luego, la transformación será canónica si

$$[q_i,q_j]_{Q,P} \;=\; [p_i,p_j]_{Q,P} \;=\; 0\,, \qquad [q_i,p_j]_{Q,P} = \delta_{ij} \tag{17}$$

Para demostrarlo hay que los corchetes. No todos son relevantes, es trivial que para una misma variable $[f,f]=0$. Y debido a la antisimetría $[f,g]=-[g,f]$, así con calcular uno de los dos alcanza. Necesitamos entonces calcular 6 corchetes no triviales. Pruebo solo algunos, les dejo a ustedes el resto

$$[x,y] \;=\; \frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial P_x} + \cancel{\frac{\partial x}{\partial Y}}\cancel{\frac{\partial y}{\partial P_y}} - \cancel{\frac{\partial x}{\partial P_x}}\cancel{\frac{\partial y}{\partial X}} - \frac{\partial x}{\partial P_y}\frac{\partial y}{\partial Y} = \cos\lambda\,.\,\frac{\sin\lambda}{m\omega} - \frac{\sin\lambda}{m\omega}\,.\,\cos\lambda \;=\; 0 \quad \checkmark$$

$$[x,p_x] \;=\; \frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial p_x}{\partial P_x} + \cancel{\frac{\partial x}{\partial Y}}\cancel{\frac{\partial p_x}{\partial P_y}} - \cancel{\frac{\partial x}{\partial P_x}}\cancel{\frac{\partial p_x}{\partial X}} - \frac{\partial x}{\partial P_y}\frac{\partial p_x}{\partial Y} = \cos\lambda\,.\,\cos\lambda - \frac{\sin\lambda}{m\omega}\,.\,(-m\omega\sin\lambda) \;=\; 1 \quad \checkmark$$

Ejercicio 14

Queremos saber si $\mathbf{L}$ es constante. Para ello de (3) tenemos que calcular $\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{L}, \mathcal{H}]$. Podríamos hacerlo en cartesianas, pero va a ser mejor hacerlo en esféricas. Supongamos que el Hamiltoniano tiene la forma particular usual (esto no vale siempre)

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r,\theta,\phi)\,, \qquad \begin{cases} p_r = m\dot{r} \\ p_\theta = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} \end{cases} \tag{18}$$

Hay varias de formas de calcular el corchete. Una masomenos simple sería expresar primero el momento angular cartesiano en función de las coordenadas y momentos angulares

$$L_x = yp_z - zp_y = -p_\theta \sin\varphi - p_\varphi \cos\varphi\, \cot\theta \tag{19}$$

$$L_y = zp_x - xp_z = +p_\theta \cos\varphi - p_\varphi \sin\varphi\, \cot\theta \tag{20}$$

$$L_z = xp_y - yp_x = +p_\varphi \tag{21}$$

De esta manera pueden probar que

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, L_x] &= -\frac{\partial V}{\partial \theta}\sin\varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\varphi\cot\theta \\ [\mathcal{H}, L_y] &= +\frac{\partial V}{\partial \theta}\cos\varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi}\sin\varphi\cot\theta \\ [\mathcal{H}, L_z] &= +\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned} \tag{22}$$

¿Qué sucede si el potencial es central? Es decir, si $V(r,\theta,\varphi) = V(r)$. En ese caso las derivadas respecto de los angulos se anulan por lo que los corchetes también se anulan. En ese caso $L_{x,y,z} = cte$ y se conserva el momento angular total, como sabemos de fuerzas centrales.

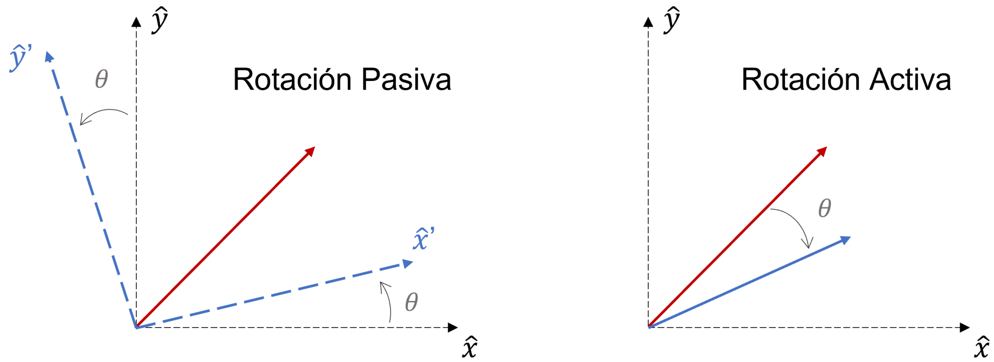
Les dejo como ejercicio probar algo similar: que en un potencial con simetría cilíndrica, $V(\rho,\varphi,z) = V(\rho,z)$, L_z se conserva.

Ejercicio 13.b

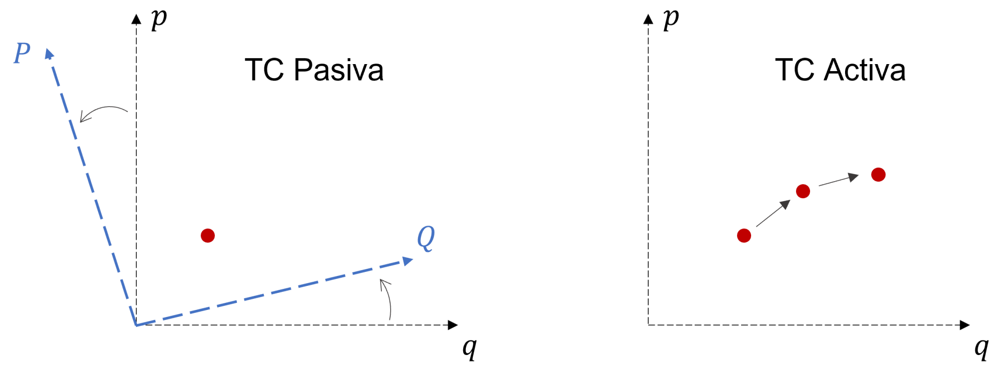
En el ejercicio nos preguntan por transformaciones infinitesimales; vamos a verlo en el lenguaje de corchetes. En general cuando hacemos una transformación podemos intepretarla de dos maneras distintas

- *Pasiva:* transformamos el sistema de coordenadas; el estado a describir es el mismo
- *Activa:* transformamos el estado; el sistema de coordenadas que lo describe es el mismo

Por ejemplo para una rotación, hacer una rotación anti-horaria del sistema de coordenadas (pasiva) es análogo a hacer una rotación horaria del vector posición (activa)



En el caso de una TC, estamos modificando su estado en el espacio de fases. En la interpretación pasiva, describimos el mismo estado desde una espacio de fases distinto. Pero en la interpretación activa, el estado evoluciona en un mismo espacio de fases. La evolución sucede mediante una sucesión de TCs infinitesimales, que equivalen a una única TC finita (dividida en muchos pasos)



Para llevar a cabo una TC infinitesimal podemos utilizar la función generatriz de la identidad, a la cual le sumamos una pequeña perturbación

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{N} q_i P_i + \epsilon\, G(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \qquad (\epsilon \ll 1) \tag{23}$$

Se suele decir que G es la 'generatriz de la TC infinitesimal' (aunque la verdadera sea F_2), o que G *genera* la TC. Usando las ecs de transformación para F_2 se tiene

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \quad \rightarrow \quad \delta q_i \equiv Q_i - q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \\ p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad \rightarrow \quad \delta p_i \equiv P_i - p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{24}$$

En el primer caso el término ya es lineal en ϵ, por lo que a primer orden podemos reemplazar la derivada en P_i por p_i

$$G(q, P) = G(q, p + \delta p) \simeq G(q, p) + \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{\delta p = 0} \underbrace{\delta p}_{\Theta(\epsilon)} + \Theta(\epsilon^2)$$

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial P_i} \simeq \epsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p_i} + \Theta(\epsilon^2)$$

Noten que podemos reescribir entonces estas ecuaciones como

$$\frac{dq_i}{d\epsilon} = \frac{\partial G}{\partial p_i}\,, \quad \frac{dp_i}{d\epsilon} = -\frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{25}$$

Tienen la forma de las ecs de Hamilton! En ese caso $\epsilon = \delta t$ y $G = \mathcal{H}$; el Hamiltoniano nos da la evolución temporal del sistema en el diagrama de fases. Pero en general, ϵ es el parámetro infinitesimal de la transformación; puede ser un tiempo, una coordenada, un ángulo, etc. Es decir que en vez de obtener la evolución temporal a través del Hamiltoniano, tenemos la evolución en el parámetro ϵ a través de un 'Hamiltoniano' G.

Veamos como ver esto mismo con corchetes. La variación de una función cualquiera f será

$$\delta f \;=\; f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) - f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \;=\; f(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) - f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{26}$$

Desarrollando a primer orden obtenemos

$$\delta f \;=\; \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\delta p_i \right) = \epsilon \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} \right) = \epsilon\,[f, G] \tag{27}$$

En particular, si $f = \mathcal{H}$ entonces

$$\boxed{\delta\mathcal{H} \;=\; \epsilon\,[\mathcal{H}, G]} \tag{28}$$

Expresémoslo así. Si $\mathcal{H}$ tiene una simetría, es decir si existe una transformación (infinitesimal) que deje el Hamiltoniano invariante a primer orden (tal que $\delta\mathcal{H} = 0$), entonces $[\mathcal{H}, G] = 0$ y existe una cantidad conservada G (si $G \neq G(t)$). Esto es el **Teorema de Noether** en el formalismo Hamiltoniano; lo que se conserva es el *generador* de la simetría.

Algunos ejemplos importantes ($Q_i \simeq q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}$)

- $G = p_i$ es el generador de las traslaciones en $\hat{q}_i$: $\quad Q_i = q_i + \Delta q \quad (\epsilon = \Delta q)$.

  Si hay simetría ante traslaciones entonces el momento lineal se conserva.

- $G = L_i$ es el generador de las rotaciones alrededor de $\hat{q}_i$.

  Para $G = L_z = xp_y - yp_x \quad (\epsilon = \Delta\theta)$: $\begin{cases} x' = x - y\Delta\theta \\ y' = y + x\Delta\theta \end{cases}$.

  Si hay simetría ante rotaciones entonces el momento angular se conserva.

- $G = \mathcal{H}$ es el generador de las traslaciones en el tiempo: $\quad Q_i \simeq q_i + \dot{q}_i \, \Delta t \quad (\epsilon = \Delta t)$.

  Si hay simetría ante traslaciones temporales entonces el Hamiltoniano se conserva (si $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}(t)$).

  (Hay que tener un poco de cuidado con este último caso porque la generatriz F_2 y el nuevo $\mathcal{K}$ dependen explícitamente del tiempo, Goldstein lo hace bien)